

DER PHYSIK UND CHEMIE.  
BAND CLX.

---

I. *Ueber die Cohäsion von Salzlösungen;*  
*von G. Quincke.*

(Theilweise im Auszuge mitgetheilt der K. Bayr. Akad. der Wissenschaften zu München am 8. Januar 1876.)

§ 1. Einleitung.

Die bis jetzt veröffentlichten Bestimmungen über die Cohäsion wässriger Salzlösungen beschränken sich fast ausschließlich auf Messungen der mittleren Steighöhe  $h$  in gläsernen Capillarröhren vom Durchmesser  $2r$  und der sogenannten specificischen Cohäsion  $a^2$ , indem

$$rh = a^2 \cos \vartheta = (a^2) \dots \dots \quad (1),$$

wo  $\vartheta$  den Randwinkel bezeichnet, den das letzte Element der Flüssigkeits-Oberfläche mit der Röhrenwand einschließt.

Nennt man  $\sigma$  das specifische Gewicht der Flüssigkeit, so ist die Oberflächenspannung oder Capillarconstante der freien (d. h. von Luft oder dem luftleeren Raum begrenzten) Flüssigkeits-Oberfläche

$$a^2 \cdot 1 \cdot \frac{\sigma}{2} = \alpha \dots \dots \quad (2),$$

oder also

$$rh \frac{\sigma}{2} = \alpha \cos \vartheta = (\alpha) \dots \dots \quad (3),$$

wo  $r$  und  $h$  in Millimetern,  $a^2$  in Quadrat-Millimetern,  $\alpha$  in Milligrammen gemessen sind, und  $\alpha$  das von einem Millimeter freier Flüssigkeits-Oberfläche getragene Gewicht bedeutet.

Ferner wird die keineswegs erwiesene Annahme gemacht, dass die wässrige Salzlösung die Röhrenwand benetze, oder der Randwinkel  $\theta$  sey. Ist diese Annahme falsch, so wird die specifische Cohäsion zu klein gefunden.

Dasselbe gilt von der wirklichen Cohäsion oder Capillar-Constante  $\alpha$ , indem das Produkt aus capillarer Steighöhe, Röhrenradius und halbem spec. Gewicht, wie Gl. 3 zeigt, nur  $\alpha \cos \theta$ , oder wie es im Folgenden bezeichnet werden soll, nur ( $\alpha$ ) bestimmt.

Viele Beobachter geben das spec. Gewicht der Flüssigkeit nicht an, und nur in seltenen Fällen lässt sich dies indirect aus anderen Bemerkungen (z. B. concentrirte Lösung etc.) ergänzen.

Bei einer früheren Untersuchung<sup>1)</sup> hatte ich gefunden, dass bei in jedem Verhältnis mischbaren Flüssigkeiten, immer die Flüssigkeit mit der kleinsten Oberflächenspannung  $\alpha$  an die freie von Luft begrenzte Oberfläche gehen muss. Fast man also eine wässrige Salzlösung als ein Gemisch von Wasser und geschmolzenem Salz auf, so würde nach meinen Messungen Wasser als Flüssigkeit mit der kleinsten Capillar-Constante an der Oberfläche der Salzlösungen sich ausbreiten müssen.

Ich habe nun schon vor längerer Zeit sämmtliche mir irgend zugängliche Messungen der Capillar-Constanten wässriger Lösungen von Säuren und Salzen seit Newton bis in die neuste Zeit auf dieselben Einheiten, Millimeter und Milligramm, reducirt.

Die Resultate der verschiedenen Beobachter zeigen im Allgemeinen Werthe zwischen 7,5 und 8 Mgr., oder nahezu dieselbe Oberflächenspannung wie reines Wasser.

Wenn auch in vielen Fällen ( $\alpha$ ) mit dem Salzgehalt zuzunehmen scheint, so sind doch die Abweichungen für verschiedene Salzlösungen nicht grösser als die von verschiedenen Beobachtern für reines Wasser gefundenen. Dieselben könnten, abgesehen von den Mängeln der be-

1) Pogg. Ann. 139, S. 80, 1870.

nutzten unreinig larröhre

Ich nen Met constant Salzlösu

Die eine Ue bei der groisen denden, Ebenso thoden e

Der schwankt wohnt v keiten a somit d zu klein

Abg stoff, S zeigen, Salzgeh

Viel ein Ma trachten der Con Allgeme scheint valentge Lösung

sich so

1) Pogg

2) vergl

nutzten Beobachtungsmethoden sehr wohl in zufälligen Verunreinigungen oder unvollkommener Benetzung der Capillarröhren ihren Grund haben<sup>1)</sup>.

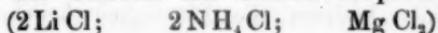
Ich habe daher seit mehreren Jahren nach verschiedenen Methoden die specifische Cohäsion  $a^2$  und die Capillarconstante oder Oberflächenspannung  $\alpha$  für eine Reihe von Salzlösungen selbst bestimmt.

Die im Folgenden mitgetheilten Beobachtungen zeigen eine Uebereinstimmung der einzelnen Bestimmungen wie sie bei der Schwierigkeit von dergleichen Messungen und dem grossen Einflus der verschiedenartigsten, kaum zu vermeidenden, Fehlerquellen von mir selbst nicht erwartet wurde. Ebenso stimmen die mit principiell ganz verschiedenen Methoden erhaltenen Resultate in befriedigender Weise überein.

Der Randwinkel wässriger Salzlösungen gegen Glas schwankt zwischen  $20^\circ$  und  $30^\circ$ , während man bisher gewohnt war, diese Salzlösungen als Glas benetzende Flüssigkeiten aufzufassen und den Randwinkel =  $0^\circ$  anzunehmen, somit den Werth der Capillarconstante  $\alpha$  etwa 10 Proc. zu klein angegeben hat.

Abgesehen von flüchtigen Substanzen, wie Chlorwasserstoff, Salpetersäure oder Ammoniak, welche eine Abnahme zeigen, wächst die Capillarconstante  $\alpha$  mit zunehmendem Salzgehalt.

Viel weniger als diese Constante  $\alpha$ , welche man als ein Maaf der wirklichen Cohäsion der Flüssigkeiten betrachten kann, ändert sich die specifische Cohäsion  $a^2$  mit der Concentration. Diese specifische Cohäsion nimmt im Allgemeinen mit der Concentration ab. Die Abnahme scheint am auffallendsten bei Salzen mit grossem Aequivalentgewicht, während bei den wässrigen und alkoholischen Lösungen der Chloride mit kleinem Aequivalentgewicht



sich sogar eine Zunahme zeigt.

1) Pogg. Ann. 135, S. 621, 1868.

- - - 138, S. 151, 1868.

2) vergl. Pogg. Ann. 139, S. 45 sqq., 1870.

Aequivalente Mengen verschiedener Chloride (von gleichem Chlorgehalt) zu derselben Menge Wasser oder Alkohol gebracht, gaben Salzlösungen von nahezu gleicher Cohäsion oder Oberflächenspannung, welche nahezu proportional der Anzahl zugesetzter Salzäquivalente zunahm.

Ob dieses Gesetz auch bei anderen z. B. schwefelsauren, salpetersauren oder kohlensauren Salzen gilt, war nicht mit Sicherheit zu entscheiden, da die Abweichungen der einzelnen Messungen sehr wohl durch kleine zufällige Verunreinigungen bedingt sein konnten.

Sehr merkwürdig sind die Aenderungen, welche nach der Entstehung der freien Oberfläche der Flüssigkeiten allmälig auftreten und längere Zeit fortdauern, so dass ich sie mit der von Wilhelm Weber als elastische Nachwirkung bei festen Körpern bezeichneten Erscheinung vergleichen möchte. Dieselben zeigen eine erst schnelle, dann immer langsamere Abnahme der Cohäsion oder Oberflächenspannung  $\alpha$ . Die Abnahme beträgt bei einfachen Flüssigkeiten, wie reinem Wasser oder reinem Alkohol nur wenige (bis zu 5) Proc. des ursprünglichen Maximalwerthes und wird durch Zusatz von geringen Mengen Salz oder Säure sehr erheblich gesteigert.

Der Werth von  $\alpha$  sinkt bei wässrigen Salzlösungen nicht blos auf 8 Mgr. oder 7,9 Mgr. wie es nach der Theorie (siehe oben S. 338) zu erwarten wäre, wenn sich reines Wasser an der Oberfläche der Flüssigkeit ansammelte, sondern bedeutend tiefer bis zu 7 oder 6 Mgr.

Bei wässrigem Alkohol war  $\alpha$  immer grösser, als bei reinem Alkohol und die Aenderungen mit der Zeit höchst unbedeutend, während nach der eben erwähnten Theorie der Ausbreitung die Oberfläche schliesslich dieselbe Spannung  $\alpha$  wie reiner Alkohol hätte zeigen müssen.

Jedenfalls besitzen die Flüssigkeitstheilchen an der Oberfläche ganz andere Eigenschaften als im Innern der Flüssigkeit. Diese Eigenschaften lassen sich aber nicht

1) Pogg. Ann. 34, S. 247, 1835. W. Weber, *de fili bombycini vi elastica. Comment. Gott. VIII, 1841. 4°.*

*a priori* vorher bestimmen, sondern müssen erst durch den Versuch für jeden besonderen Fall festgestellt werden.

Die von mir als elastische Nachwirkung bei Flüssigkeiten bezeichneten Erscheinungen werde ich im 2. Abschnitt dieser Mittheilung behandeln, während der erste die Messungen von Steighöhen in Capillarröhren und von flachen Luftblasen umfaßt.

## § 2.

### Methode der capillaren Steighöhen.

Aus einer dickeren möglichst gereinigten Glasmöhre wurden vor der Glasbläserlampe Fäden von 0,2 bis 0,5 Mm. innerem Durchmesser gezogen, oben zugeschmolzen und mit dem zugeschmolzenen Ende durch 2 Kautschuckringe geschoben, welche das von dem Glasfaden gebildete Capillarrohr auf einem reinen Spiegelglasstreifen von 300 Mm. Länge und 10 Mm. Breite festhielten. Der Spiegelglasstreifen trug eine eingeätzte Millimetertheilung und wurde gleichzeitig mit dem unteren Ende der Capillarröhre in die zu untersuchende Flüssigkeit eingetaucht. Die Höhe  $h$ , bis zu welcher letztere sich über die ebene horizontale Flüssigkeitsoberfläche erhob, sobald das obere zugeschmolzene Ende der Capillarröhre abgeschnitten war, wurde bis auf 0,1 Mm. genau an der vertikal gestellten Millimeterscala mit einem horizontalen Fernrohr oder einer passend gestellten Lupe abgelesen, das Capillarrohr an der Stelle des Flüssigkeitsmeniskus mit dem Glasmesser durchgeschnitten und der grösste und kleinste Durchmesser der Schuttfläche durch ein Mikroskop mit Ocular-Mikrometer bestimmt.

Das letztere hatte 100 Scalentheile, von denen noch Zehntel zu schätzen waren. 1 Scalentheil entsprach 0,00941 Mm. Das halbe Mittel aus den gemessenen Werthen des Röhrendurchmessers wurde als Röhrenradius  $r$  in Rechnung gebracht. Das specifische Gewicht bestimmte ich mit einem Senkgläschen, das an einem feinen

Platindraht an einer empfindlichen hydrostatischen Wage aufgehängen war.

Die Concentration der Lösungen habe ich entweder selbst bestimmt, oder aus dem specifischen Gewicht nach den Messungen von Gerlach<sup>1)</sup> berechnet, von deren Zuverlässigkeit ich mich mehrfach durch eigene Beobachtungen überzeugt habe.

Die Salzlösungen wurden gewöhnlich 12 bis 36 Stunden nach der Auflösung des Salzes untersucht, welches so rein war, wie ich es mir im Handel verschaffen konnte. Das dabei verwandte Wasser wurde in der Regel durch längeres Kochen von der darin absorbirten Luft befreit.

Alle Messungen, die übrigens nach der Methode der capillaren Steighöhen und der Methode der flachen Luftblasen kurz hintereinander an derselben Salzlösung ange stellt wurden, beziehen sich auf eine mittlere Temperatur von 15° bis 20° C.

Sowohl die Capillarconstante  $\alpha$  wie die spec. Cohäsion  $a^2$  nehmen mit sinkender Temperatur zu und erreichen, kurz ehe die Flüssigkeit erstarrt, ihren grössten Werth. Diese Maximalwerthe hätte man eigentlich zu vergleichen. Ich habe jedoch, um Beschaffung und Uebersichtlichkeit der Apparate nicht zu sehr zu erschweren, vor der Hand darauf verzichten müssen die Abhängigkeit von der Temperatur genauer zu bestimmen.

Unter den horizontalen Strichen der folgenden Tabellen, in denen die Beobachtungen übersichtlich zusammengestellt sind, stehen die Mittel der darüberstehenden Beobachtungen angegeben.

Die mit S überschriebene Spalte giebt den Salzgehalt, die Gewichtstheile wasserfreien Salzes, welches in 100 Theilen Wasser gelöst war.

1) G. Th. Gerlach, Specifische Gewichte der gebräuchlichsten Salzlösungen bei verschiedenen Concentrationsgraden, Freiberg 1859.

## Capillare Steighöhen von wässrigen Salzlösungen.

## I. Chloride.

Spec. Gew. $\sigma$	Salzgehalt $S$	$2r$	$h$	Cohäsion ( $\alpha$ )	Spec. Cohäsion ( $a^2$ )
------------------------	-------------------	------	-----	--------------------------	--------------------------------

## Chlor-Wasserstoff.

1,0084	1,71	mm.	mm.	mgr.	□ mm.
		0,3790	77,1	7,379	14,62
		0,3517	83,1	7,365	14,61
1,0615	14,55	0,2941	101,6	7,532	14,94
		0,6216	44,8	7,425	14,72
		0,3535	77,5	7,257	13,68
1,1084	28,31	0,2453	111,1	7,276	13,71
		0,5576	46,5	7,235	13,63
		0,3048	85,2	7,256	13,67
1,1888	64,57	0,3024	85,8	7,194	12,98
		0,3442	65,6	7,196	12,98
		0,2509	90,5	7,190	12,97
		0,2382	96,8	7,193	12,98
				6,709	11,29
				6,750	11,36
				6,853	11,53
				6,771	11,39

## Chlor-Lithium.

1,0595	11,14	0,6240	47,0	7,769	14,67
		0,4706	62,7	7,816	14,75
		0,3714	79,3	7,802	14,73
1,1233	25,14	0,5056	58,3	7,796	14,72
		0,4380	68,8	8,277	14,74
		0,4365	69,1	8,463	15,07
				8,470	15,09
				8,403	14,97

## Chlor-Ammonium.

1,0360	13,30	0,4554	65,0	7,667	14,80
		0,4291	68,6	7,625	14,72
		0,3995	73,8	7,636	14,74
1,0758	35,18	0,4310	70,3	7,643	14,75
		0,3552	83,9	8,151	15,16
		0,3270	92,0	8,017	14,90
				8,091	15,04
				8,086	15,03

Spec. Gew. $\sigma$	Salzgehalt $S$	$2r$	$h$	Cohäsion ( $\alpha$ )	Spec. Cohäsion ( $\alpha^2$ )	Spec. Ge $\sigma$
Chlor-Natrium.						
1,0865	13,27	0,4772	59,2	7,674	14,13	
		0,3530	80,9	7,756	14,28	
		0,2712	105,1	7,743	14,25	
1,1543	25,61	0,3680	75,8	7,724	14,22	1,0813
		0,2446	113,3	8,050	13,95	
		0,2169	128,8	8,000	13,87	
				8,063	13,97	
1,1574	26,22	0,7930	35,3	8,038	13,93	1,2128
		0,3328	83,6	8,100	14,00	
		0,2696	103,9	8,048	13,91	
				8,102	14,01	
1,2063	37,55	0,3590	77,3	8,083	13,97	1,4197
		0,3411	81,7	8,370	13,88	
		0,2498	112,8	8,405	13,93	
				8,498	14,09	
				8,418	13,97	
Chlor-Kalium.						
1,0487	8,03	0,3685	76,6	7,401	14,11	
		0,3491	82,0	7,506	14,32	
		0,2244	125,5	7,382	14,08	
1,0931	16,13	0,8097	34,7	7,430	14,17	
		0,6131	45,8	7,678	14,05	
		0,3385	82,7	7,674	14,04	
				7,649	14,00	1,071
1,1471	27,36	0,8582	32,0	7,667	14,03	
		0,3515	77,7	7,875	13,73	
*		0,3442	79,4	7,832	13,66	
				7,836	13,67	1,130
1,1709	32,83	0,2692	101,8	7,848	13,69	
		0,2446	112,2	8,023	13,71	
		0,2273	119,7	8,037	13,70	
				7,964	13,60	
				8,008	13,68	1,222
Chlor-Magnesium.						
1,1385	18,75	0,3576	78,8	8,021	14,09	
		0,2758	101,5	7,966	13,99	
		0,2046	137,6	8,017	14,08	
1,2824	43,37	0,3980	70,6	8,000	14,05	
		0,3530	79,3	9,065	14,05	
		0,3002	93,8	8,984	14,02	
				9,010	14,05	
				9,020	14,04	

Spec. Gew.	Salzgehalt	$2r$	$h$	Cohäsion ( $\alpha$ )	Spec. Cohäsion ( $\alpha^2$ )
$\sigma$	$S$				

## Chlor-Calcium.

1,0813	10,33	0,6369 0,3916 0,3496	44,9 70,9 80,9	7,731 7,506 7,645	14,30 13,89 14,15
1,2128	28,20	0,5594 0,4384 0,4229	49,9 62,0 64,4	7,627 8,465 8,243 8,258	14,11 13,96 13,59 13,62
1,4197	70,61	0,4063 0,4001 0,3720 0,2708	67,5 67,5 73,6 99,7	8,322 9,736 9,585 9,723 9,581	13,72 13,72 13,51 13,70 13,50
				9,656	13,64

## Chlor-Strontium.

1,0718	7,27	0,5567 0,4827 0,3091	50,3 57,7 90,3	7,504 7,466 7,482	14,01 13,93 13,96
1,1303	15,83	0,5208 0,3082 0,2305	51,4 88,1 116,6	7,484 7,566 7,674 7,600	13,97 13,39 13,58 13,45
1,2289	29,11	0,6681 0,6102 0,4296 0,2974	38,3 42,5 59,1 86,9	7,613 7,863 7,969 7,802 7,939	13,47 12,79 12,97 12,70 12,72
1,3622	49,08	0,3127 0,3040 0,2757	79,4 80,3 90,5	7,893 8,457 8,312 8,498	12,85 12,42 12,20 12,47
1,3620 +	49,08	0,3968 0,2783 0,2755	62,5 88,7 89,3	8,422 8,445 8,403 8,379	12,36 12,40 12,34 12,30
				8,407	12,35

Spec. Gew.	Salzgehalt	$2r$	$h$	Cohäsion ( $\alpha$ )	Spec. Cohäsion ( $\alpha^2$ )
$\sigma$	$S$				

## Chlor-Barium.

1,0620	7,11	0,5859 0,3094 0,2811	48,6 90,6 99,4	7,560 7,444 7,420	14,23 14,02 13,97
1,1306	15,38	0,3947 0,3270	68,8 83,0	7,475 7,676 7,672	14,07 13,58 13,57
1,2043	24,76	0,4333 0,3936 0,2972 0,2135	59,1 64,1 85,2 120,0	7,674 7,707 7,597 7,628 7,757	13,57 12,80 12,62 12,66 12,88
1,2501	30,53	0,5448 0,3599	45,6 69,6	7,672 7,778 7,830	12,78 12,45 12,53
				7,804	12,49

Spec.

 $\sigma$ 

## Chlor-Mangan.

1,1876	25,62	0,7782 0,4043 0,2834	34,1 68,1 92,2	7,879 8,175 7,959	13,27 13,77 13,07
1,3345	49,61	0,4120 0,2878	62,2 88,4	7,938 8,553 8,490 8,521	13,37 12,81 12,73 12,77

1,36

1,51

1,83

## Chlor-Eisen.

1,2126	41,77	0,6082 0,5641 0,3294	43,1 46,9 80,7	7,949 8,023 8,060	13,11 13,23 13,29
1,4135	66,43	0,4110 0,3738 0,3383 0,2016	59,7 63,7 70,5 121,8	8,011 8,670 8,418 8,428 8,678 8,549	13,21 12,27 11,91 11,92 12,28 12,10

1,05

1,15

## II. Sulfate.

Spec. Gew. $\sigma$	Salzgehalt $S$	$2r$	$h$	Cohäsion ( $a$ )	Spec. Cohäsion ( $a^2$ )
------------------------	-------------------	------	-----	---------------------	--------------------------------

## Schwefelsäure.

1.	0.	mm. 0,8299 0,3026 0,2416	mm. 35,3 98,0 121,0	mgr. 7,325 7,415 7,310	□ mm. 14,65 14,83 14,62
1,0492	8,43	0,5812 0,3320 0,2114	48,6 84,9 131,6	7,350 7,468 7,389 7,298	14,70 14,12 14,09 13,91
1,2318	45,14	0,3305 0,3267 0,2705	75,7 76,1 94,4	7,385 7,703 7,656 7,865	14,04 12,51 12,43 12,77
1,3621	85,61	0,5480 0,1983 0,1794	42,0 115,3 127,8	7,741 7,838 7,784 7,809	12,57 11,51 11,43 11,47
1,5197	161,1	0,6844 0,2356 0,1841	29,4 86,0 109,9	7,810 7,643 7,696 7,686	11,47 10,06 10,13 10,12
1,8371	180,4	0,8780 0,2421 0,2011	14,8 53,8 65,2	7,675 5,969 5,984 6,022	10,10 6,50 6,51 6,55
				5,992	6,52

## Schwefelsaures Natron.

1,0526	6,12	0,4299 0,4257 0,4046	66,6 67,3 70,6	7,537 7,541 7,518	14,32 14,32 14,28
1,1564	19,85	0,6637 0,5387 0,5220	40,1 49,1 50,7	7,532 7,691 7,725 7,650	14,31 13,30 13,36 13,23
				7,689	13,30

Spec. Gew.	Salzgehalt	$2r$	$h$	Cohäsion ( $\alpha$ )	Spec. Cohäsion ( $a^2$ )
$\sigma$	$S$				

## Schwefelsaures Kali.

1,0251	3,17	mm.	mm.	mgr.	□ mm.
		0,7376	39,4	7,456	14,55
		0,6392	45,3	7,420	14,47
1,0781	10,00	0,3888	76,2	7,593	14,81
				7,490	14,61
		0,4971	56,3	7,543	13,99
		0,4111	66,3	7,345	13,62
		0,2717	102,3	7,491	13,90
				7,460	13,84

## Schwefelsaure Magnesia.

1,1390	14,99	0,4596	58,3	7,632	13,40
		0,3284	80,8	7,556	13,26
		0,3242	82,6	7,626	13,39
1,2993	35,98	0,4799	51,0	7,605	13,32
		0,3496	71,0	8,170	12,57
		0,2894	87,0	8,065	12,42
				8,177	12,59
				8,137	12,53

## Schwefelsaures Zinkoxyd.

1,0910	9,28	0,5769	47,7	7,506	13,76
		0,2986	91,0	7,411	13,58
		0,2013	137,4	7,544	13,83
1,2187	22,59	0,4535	54,3	7,487	13,72
		0,3175	77,2	7,504	12,31
		0,2957	83,4	7,467	12,26
1,4168	45,88	0,4602	49,1	7,516	12,33
		0,4337	52,5	7,499	12,30
		0,3599	61,5	8,004	11,30
1,4539	50,59			8,067	11,39
		0,3176	70,0	7,843	11,08
		0,3002	75,0	7,971	11,26
		0,2526	87,2	8,079	11,12
				8,185	11,26
				8,008	11,02
				8,091	11,13

Spec. Gew. $\sigma$	Salzgehalt $S$	$2r$	$h$	Cohäsion ( $\alpha$ )	Spec. Cohäsion ( $a^2$ )
------------------------	-------------------	------	-----	--------------------------	--------------------------------

## Schwefelsäures Kupferoxyd.

		mm. 0,2974 0,2423	mm. 99,1 120,4	mgr. 7,420 7,345	□ mm. 14,73 14,59
1,0664	6,40	0,3336	84,3	7,382	14,66
		0,1807	154,8	7,497	14,06
		0,1760	158,4	7,445 7,432	13,96 13,94
1,1144	11,61	0,4446	60,6	7,458	13,98
		0,3063	87,9	7,508	13,48
		0,2042	131,8	7,502 7,501	13,47 13,46
1,1859	19,64	0,5279	48,6	7,504	13,47
		0,4706	54,4	7,607	12,83
		0,2555	98,4	7,590 7,454	12,80 12,57
				7,550	12,73

## III. Nitrate und Carbonate.

## Salpetersäure.

		mm. 0,3786 0,3209 0,1848	mm. 75,1 91,1 156,4	mgr. 7,186 7,389 7,305	□ mm. 14,23 14,62 14,45
1,0915	18,08	0,5875	44,7	7,293	14,43
		0,3739	70,9	7,166	13,13
		0,1332	196,3	7,233 7,141	13,25 13,08
1,2073	50,10	0,4982	46,3	7,180	13,15
		0,4015	57,0	7,110	11,79
		0,3403	67,8	6,902 6,963	11,44 11,50
				6,992	11,58

## Salpetersäures Natron.

		mm. 0,3444 0,2451 0,2164	mm. 75,0 105,4 118,7	mgr. 7,782 7,784 7,739	□ mm. 12,92 12,92 12,84
1,3811	84,88	0,4535	53,05	7,768	12,89
		0,2766	87,60	8,308	12,03
		0,2743	86,80	8,368 8,220	12,12 11,90
				8,299	12,02

Spec. Gew. $\sigma$	Salzgehalt $S$	$2r$	$h$	Cohäsion ( $\alpha$ )	Spec. Cohäsion ( $\alpha^3$ )	Spec. G. $\alpha$
Salmetersaures Kali.						
1,0988	17,46	0,4127	66,0	7,482	13,61	
		0,4099	67,2	7,566	13,77	
		0,3406	80,1	7,496	13,64	
		0,2856	93,9	7,367	13,41	
		0,2240	120,3	7,401	13,47	
1,1398	25,80			7,462	13,58	0,998
		0,6879	38,2	7,489	13,14	
		0,6869	38,8	7,595	13,32	
		0,3462	76,6	7,558	13,26	
		0,2385	104,9	7,484	13,13	0,997
		0,2305	114,1	7,497	13,15	
				7,525	13,20	
Kohlensaures Natron.						
1,1213	12,90	0,5325	51,7	7,718	13,77	0,980
		0,5164	53,1	7,688	13,71	
		0,2816	96,5	7,617	13,58	
1,1670	18,40			7,674	13,69	
		0,5997	44,5	7,734	13,25	
		0,5041	52,5	7,721	13,23	0,945
		0,3662	71,9	7,681	13,16	
				7,712	13,21	
Kohlensaures Kali.						
1,1631	20,60	0,3068	89,5	7,984	13,73	0,933
		0,2357	113,9	7,807	13,43	
		0,1986	135,0	7,794	13,41	
1,2342	29,72			7,828	13,52	
		0,3965	65,7	8,042	13,04	
		0,2381	107,8	7,918	12,83	
		0,1774	146,6	8,026	13,01	
1,2502	34,05			7,995	12,96	1,11
		0,5683	46,0	8,174	13,07	
		0,2988	85,7	8,005	12,80	
		0,2268	112,6	8,984	12,77	
1,2553	34,88			8,054	12,88	1,23
		0,3740	69,4	8,147	12,98	
		0,3656	72,1	8,271	13,18	
		0,3119	82,5	8,076	12,86	
1,4444	72,63			8,165	13,01	
		0,5416	47,4	9,268	12,83	
		0,4437	59,0	9,454	13,09	
		0,2442	107,0	9,436	13,07	
1,5667	104,9			9,386	13,00	
		0,6064	45,2	10,74	13,71	
		0,3477	79,1	10,77	13,75	
		0,2706	103,0	10,91	13,93	
				10,81	13,80	

## IV. Organische Substanzen etc.

Spec. Gew. $\sigma$	Salzgehalt $S$	$2r$	$h$	Cohäsion ( $\alpha$ )	Spec. Cohäsion ( $a^2$ )
------------------------	-------------------	------	-----	--------------------------	--------------------------------

## Ammoniak.

		mm.	mm.	mgr.	□ mm.
0,9985	0,41	0,6078	48,0	7,271	14,56
		0,3725	78,4	7,290	14,60
		0,2668	109,1	7,264	14,55
0,9976	0,64	0,4207	68,6	7,275	14,57
		0,3177	91,9	7,197	14,43
		0,2032	144,5	7,280	14,60
0,9800	5,04	0,4089	67,1	7,323	14,69
		0,3517	79,7	7,207	14,57
		0,3002	93,1	6,720	13,72
		0,1895	146,7	6,866	14,02
0,9496	14,72	0,4551	58,5	6,848	13,97
		0,2765	95,3	6,794	13,87
		0,2326	117,1	6,807	13,89
0,9390	18,64	0,5654	48,6	6,320	13,30
		0,4835	54,5	6,246	13,18
		0,1966	132,1	6,466	13,61
				6,344	13,36
				6,452	13,74
				6,187	13,18
				6,098	12,99
				6,246	13,30

## Rohrzucker.

1,1170	37,67	0,5286	51,1	7,544	13,51
		0,4681	57,4	7,504	13,44
		0,4625	57,6	7,439	13,31
1,2359	102,2	0,5307	46,1	7,496	13,42
		0,4406	56,6	7,558	12,23
		0,3586	69,2	7,703	12,47
				7,667	12,41
				7,643	12,37

## Gerbsäure.

1,0352	10,0	0,3676	75,3	7,163	13,84
		0,3000	94,3	7,322	14,15
		0,2986	94,0	7,264	14,05
				7,250	14,01

Spec. Gew. $\sigma$	Salzgehalt $S$	$2r$	$h$	Cohäsion $\alpha$	Spec. Cohäsion ( $\alpha^2$ )
Arabin.					
1,0004	0,5	mm. 0,5364 0,4318 0,3666	mm. 54,2 68,7 78,8	mgr. 7,271 7,422 7,224	mm. 14,54 14,84 14,44 7,306 14,61
Alkohol.					
0,9973	1,19	0,5682 0,4516 0,3907	47,8 61,9 70,2	6,772 6,971 6,855 6,866	13,58 13,98 13,75 13,77
0,9852	9,84	0,5029 0,3827 0,2955	41,1 53,6 69,4	5,091 5,054 5,053	10,34 10,26 10,26
0,9110	111,68	0,3704 0,3534 0,3378	33,6 35,0 36,8	5,066 2,834 2,818 2,831	10,29 6,223 6,186 6,216
0,7904	$\infty$	0,5064 0,4857 0,3004	23,15 23,9 38,3	2,828 2,315 2,294 2,274 2,294	6,208 5,857 5,805 5,754 5,805

Ein † bei den Lösungen von Chlor-Strontium bedeutet, dass die Flüssigkeit 6 Monate nach Auflösung des Salzes untersucht worden war.

### § 3.

Methode der flachen Luftblasen. Correction auf unendlich großen Durchmesser.

Vor einem Kathetometer<sup>1)</sup> mit einem horizontalen Mikroskop von 120 Mm. Object-Abstand wurde ein von planparallelen Glasplatten gebildeter Glastrog<sup>2)</sup> auf einer

1) Pogg. Ann. 105, S. 15 und Taf. 1, Fig. 4, 5, 11, 12, 1858.

2) Pogg. Ann. 153, S. 181 u. Taf. 1, Fig. 8, 1874.

reinen Spiegelglasplatte aufgestellt, die mit drei Stellschrauben und einer Wasserwage genau horizontal gestellt werden konnte. Die vertikale Verschiebung des Mikroskops konnte bis auf 0,001 Mm., die horizontale bis auf 0,05 Mm. genau gemessen werden. Der aus der Werkstätte von C. A. Steinheil Söhne in München bezogene Glastrog, dessen Wände einen Hohlraum von 50 Mm. Länge und Breite und 20 Mm. Höhe begrenzten und ohne jeden Kitt flüssigkeitsdicht an einander schlossen, wurde mit der betreffenden Flüssigkeit gefüllt. In diese Flüssigkeit wurde eine horizontale Glasplatte gehängt, deren Seiten auf dem horizontalen Rande des Glastroges fest auflagen. Durch einen rechtwinklig gebogenen reinen Glasfaden von 1 bis 2 Mm. Durchmesser wurde mit dem Munde, einer kleinen Druckpumpe oder in anderer geeigneten Weise eine flache Luftblase unter die horizontale Deckplatte gebracht, so dass der Umriss der Luftblase scharf im Gesichtsfelde des Mikroskops erschien.

Aus den vertikalen Abständen  $K$  und  $k$  der Kuppe und des Bauches (vertikalen Meridianelementes) der flachen Luftblase von der horizontalen Deckplatte ergiebt sich dann die specifische Cohäsion  $a^2$  und der spitze Randwinkel  $\theta$ , unter welchem die Flüssigkeits-Oberfläche die horizontale Glasplatte schneidet.

Die Messungen wurden möglichst bald nach Entstehung der Luftblase angestellt, indem man das Mikroskop des Kathetometers nacheinander einstellte auf die Kuppe, den rechten und linken Bauch, die Kuppe, den rechten und linken Durchschnittspunkt der Meridiancurve mit der horizontalen Glasplatte, und jedes Mal die Stellung der Kathetometerscala ablas. Eine ähnliche Reihe Messungen wurde wiederholt, nachdem der grösste Durchmesser  $2r$  der flachen Luftblase gemessen war. Aus den 12 Ablesungen, die 2 bis 3 Minuten Zeit in Anspruch nahmen, ergaben sich 4 Werthe für  $K$  und  $K - k$ , deren Mittelwerth in folgender Weise mit Hülfe des Durchmessers  $2r$  auf eine unendlich grosse Luftblase reducirt wurde.

Für unendlich grosse flache Luftblasen ist, wie ich früher<sup>1)</sup> nachgewiesen habe

$$(K - k)^2 = a^2 \quad \dots \quad (4).$$

$$\frac{K}{K - k} \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \frac{\theta}{2} \quad \dots \quad (5),$$

Aus  $(K - k)^2$  erhält man durch Multiplication mit dem halben specifischen Gewichte die wirkliche Cohäsion oder Oberflächenspannung  $\alpha$  der freien Oberfläche der Flüssigkeit unabhängig vom Randwinkel (vergl. Gl. 2).

Für flache Luftblasen von endlichem Durchmesser  $2r$  lässt sich die Theorie bis jetzt nicht vollständig durchführen. Die Erfahrung lehrt aber, dass für diese Luftblasen  $K$  und  $K - k$  wenig grösser, als bei unendlich grossen Blasen sind. Die Differenz beträgt höchstens 0,04 des ganzen Werthes, sobald  $2r > 20$  Mm.

Für viele Bestimmungen kann daher der daraus entstehende Fehler vernachlässigt und  $K$  oder  $K - k$  als unabhängig vom Durchmesser der Blase angesehen werden. Dies bei meinen früheren Versuchen eingeschlagene Verfahren war um so mehr berechtigt, so lange der Einfluss anderer Fehlerquellen, besonders zufälliger unvermeidlicher Verunreinigungen viel bedeutender war.

Es lässt sich jedoch auch dieser Mangel in folgender Weise beseitigen.

In reinem Wasser wurden an flachen Luftblasen, deren Durchmesser zwischen 14 und 100 Mm. schwankte,  $K$  und  $K - k$  bestimmt. Nennt man die für den Durchmesser 100 Mm. gefundenen Werthe von  $K$  und  $K - k$

$$K_\infty \text{ und } a,$$

so lässt sich das Verhältniss

$$u = \frac{K}{K_\infty} \text{ und } v = \frac{K - k}{a} \quad \dots \quad (6)$$

für jeden Durchmesser  $2r$  durch Interpolation bestimmen.

Da nun flache Luftblasen in Wasser und wässrigen

1) Pogg. Ann. 139, S. 7, 1870.

Salzlösungen, wie der Versuch zeigt, sehr nahe dieselbe Gestalt haben, so braucht man die bei einer flachen Luftblase vom Durchmesser  $2r$  in wässrigen Salzlösungen beobachteten Werthe  $K$  und  $K - k$  nur mit dem für reines Wasser bei demselben Durchmesser gefundenen Verhältniss  $u$  resp.  $v$  zu dividiren, um die entsprechenden Größen für eine unendlich grosse Luftblase zu erhalten.

Um das Fadenkreuz des horizontalen Mikroskops auf die Kuppe der flachen Luftblasen von grossem Durchmesser einstellen zu können, wurde in das Wasser ein 2 Mal in verschiedener Ebene rechtwinklig gebogener reiner Platin-draht gebracht, dessen Spitze sehr nahe der Kuppe der Luftblase lag und sich in derselben spiegelte. Das Fadenkreuz wurde dann auf die Mitte zwischen Spitze und Bild der Spitze eingestellt.

Für die grossen Luftblasen von 100 Mm. Durchmesser wurde statt des Steinheil'schen Glastroges ein solcher benutzt, der 130 Mm. lang und breit aus guten Spiegelglasplatten mit reinem Siegellack zusammenklebt war und eine Deckplatte von sehr ebenem Spiegelglas hatte.

Ein analoges Verfahren wurde bei Alkohol und alkoholischen Lösungen benutzt. Die Kittstellen des grossen Spiegelglastroges waren dabei zum Schutze gegen Alkohol mit geschmolzenem Paraffin überzogen.

Im Mittel aus 4 Versuchsreihen erhielt ich:

Wasser			V. Alkohol		
$2r$	$K$	$K - k$	$2r$	$K$	$K - k$
mm.	mm.	mm.	mm.	mm.	mm.
100	5,613	3,975	100	3,448	2,434
47	5,806	4,077	39,7	3,529	2,525
37,6	5,807	4,146	31,1	3,596	2,538
30,1	5,821	4,147	25,4	3,612	2,578
26,2	5,823	4,117	19,7	3,618	2,602
20,1	5,738	4,022	15,3	3,633	2,606
16,9	5,554	3,939	12,7	3,580	2,563
14,2	5,436	3,780			

Daraus folgt durch einfache Interpolation:

$2r$	W a s s e r		A l k o h o l	
	$\frac{K}{K_\infty}$	$\frac{K-k}{a}$	$\frac{K}{K_\infty}$	$\frac{K-k}{a}$
$\infty$	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
mm.				
40	1,0342	1,0257	1,0230	1,0377
35	1,0353	1,0431	1,0334	1,0406
30	1,0369	1,0433	1,0439	1,0434
25	1,0351	1,0312	1,0480	1,0579
20	1,0207	1,0125	1,0515	1,0686
15	0,9785	0,9633	1,0587	1,0708
13			1,0402	1,0551

Bei den Beobachtungen hatten die flachen Luftblasen in wässrigen Salzlösungen meist einen Durchmesser von etwa 30 Mm., in alkoholischen Salzlösungen von etwa 20 Mm. Bei diesen Dimensionen haben  $K$  und  $K - k$  einen Maximalwerth<sup>1)</sup>. Bei kleinen Schwankungen des Durchmessers änderten sich dann diese Größen am wenigsten.

Die aus den Beobachtungen sich ergebenden Mittelwerthe von  $K$  und  $K - k$  wurden mit den, dem betreffenden Durchmesser  $2r$  entsprechenden, Zahlen der Tabelle VI dividirt, und aus den so *corrigirten* Werthen von  $K$  und  $K - k$  mit Hülfe der Gll. 4 und 2 der Werth von  $a$  und  $a^2$  berechnet. Die Bestimmungen an verschiedenen flachen

1) Anm. Genauer waren diese Durchmesser 30 Mm. und 18 Mm., verhielten sich also wie 1,666 : 1, während die Quadratwurzeln aus den spec. Cohäsionen für Wasser und Alkohol sich wie  $3,975 : 2,434 = 1,634 : 1$  verhielten, d. h. in demselben Verhältnis standen.

Für Flüssigkeiten mit der spec. Cohäsion  $a^2$  würden also flache Tropfen oder Luftblasen auf oder unter einer Deckplatte mit sehr kleinem Randwinkel eine Maximalhöhe zeigen bei

$$2r = 30 \text{ Mm.} \cdot \frac{a}{3,975} \text{ oder etwa } 7,5 \cdot a \text{ Mm.}$$

Für flache Quecksilbertropfen in Luft fand Désains (*Ann. d. chim.* (3.) LI, S. 442, 1867) eine Maximalhöhe bei 23 Mm. Durchmesser, während obige Formel  $a$  für Quecksilber = 2,8 Mm. gesetzt, 21 Mm., also nahezu denselben Werth ergiebt.

Luftblasen zeigten keine grösere Verschiedenheit, als die Bestimmungen aus capillaren Steighöhen nach der 1ten Methode.

Im luftleeren Raum fand ich früher<sup>1)</sup>) die Steighöhe des reinen luftfreien Wassers an einer vertikalen vollkommen benetzten cylindrischen Glaswand von 50 Mm. Durchmesser 3,995 Mm. bis 4,287 Mm., im Mittel 4,096 Mm. bei einer Temperatur von 18°. Diese Steighöhe entspricht  $K - k$  bei flachen Luftblasen. Die Schwankungen der einzelnen Messungen und die Mittelwerthe stimmen so nahe überein, als man irgend erwarten kann.

#### §. 4.

In den folgenden Tabellen findet sich auch der Werth des *Randwinkels*  $\theta$  nach Gl. 5 mit den so *corrigiten* Werthen von  $K$  und  $K - k$  berechnet.

Dies Verfahren ist nicht einwurfsfrei, aber eingeschlagen worden, weil damit eine wünschenswerthe Controlle der aus den Messungen von  $K - k$  gefundenen Werthe von  $\alpha$  erreicht wurde. Außerdem findet man mit den uncorrigirten Grössen  $K$  und  $K - k$  Werthe des Randwinkels, die von den in den Tabellen aufgeführten nur wenig abweichen.

Uebrigens würde sich diese indirekte Bestimmung des Randwinkels, zu der die Beobachtungen nebenher geführt haben, sobald es auf eine genaue Kenntniß desselben ankäme, mit Vortheil durch directe Messungen des Randwinkels ersetzen lassen.

Die Beobachtungen sind in den folgenden Tabellen übersichtlich zusammengestellt.

Unter den horizontalen Strichen stehen die arithmetischen Mittel der betreffenden Beobachtungsreihen.

Ein Strich in der letzten Columnne weist darauf hin, daß die Rechnung einen imaginären Randwinkel ( $< 0$ ) ergeben hat. Ein solcher ist dann bei dem Mittel als 0° in Rechnung gebracht worden.

Bei dem concentrirten Alkohol von 0,9110 und 0,7904 specifischem Gewicht wurden die Zahlen der Tabelle VI

1) Pogg. Ann. 135, S. 140, 1868.

für reinen Alkohol bei der Reduction auf unendlich grossen Durchmesser der Luftblasen benutzt; bei dem anderen verdünnten Alkohol die Zahlen für reines Wasser.

Ein Stern \* in der 2ten Spalte bedeutet, daß die betreffende Luftblase in Wasser, Chlorecalcium- oder Kupfervitriollösung aus elektrolytischem, möglichst reinem, Wasserstoff bestand. Derselbe wurde aus verdünnter Schwefelsäure mit einer Kathode von Platinblech und einer Anode aus Zinkamalgam entwickelt. Die Salzlösung selbst war durch Kochen von der absorbierten atmosphärischen Luft befreit und unter Abschluß der Luft erkaltet worden.

Ein Theil der Luftblasen in den Lösungen der Chloride der Alkalien und Alkali-Metalle wurde statt mit dem Munde mit einer kleinen Druckpumpe geblasen, um Luft mit starkem Kohlensäuregehalt zu vermeiden.

Die Natur des Gases war bei allen diesen Versuchen ohne Einfluß auf die Gestalt der Luftblasen und die Oberflächenbeschaffenheit der Flüssigkeit.

Einzelne Unregelmäßigkeiten hatten mich vermuten lassen, daß eine frisch bereitete Lösung eine andere Cohäsion zeige, als solche, die längere Zeit gestanden habe. Diese Vermuthung erwies sich jedoch als unbegründet. Die mit † bezeichneten Beobachtungsreihen bei Chlor-Strontium geben nämlich dieselben Werthe für  $\alpha$  6 Monate nach Auflösung des Salzes wie die darüber stehenden Beobachtungen an derselben frisch bereiteten Lösung.

#### VII. Chloride.

Spec. Gew. $\sigma$	$2r$	$K$	$K-k$	Cohäsion $\alpha$	Spec. Cohäsion $\alpha^2$	Randwinkel $\theta$
------------------------	------	-----	-------	----------------------	------------------------------	------------------------

#### Wasser.

	mm.	mm.	mm.	mgr.	□ mm.	
1.	28,5	5,807	4,269	8,445	16,89	30° 36'
1.	30,4	5,824	4,264	8,350	16,70	27° 14'
1.	28,9*	5,831	4,279	8,455	16,91	29° 14'
				8,415	16,83	29° 3'

Spec. Gew. $\sigma$	$2r$	$K$	$K-k$	Cohäsion $\alpha$	Spec. Cohäsion $\alpha^2$	Rand- winkel $\theta$
---------------------------	------	-----	-------	----------------------	---------------------------------	-----------------------------

## Chlor-Wasserstoff.

1,0084	26,9	5,722	4,150	8,102	16,07	25° 48'
	27,0	5,711	4,104	7,925	15,71	20° 48'
1,0615	26,2	5,532	3,980	8,014	15,89	23° 18'
	23,0	5,520	3,903	7,861	14,81	21° 56'
				7,718	14,54	12° 18'
1,1084	26,8	5,424	3,910	7,790	14,68	17° 7'
	26,2	5,450	3,920	7,912	14,28	23° 52'
				7,964	14,36	21° 48'
1,1929	29,3	5,080	3,661	7,938	14,32	22° 50'
	29,3	5,032	3,665	7,370	12,36	19° 18'
				7,387	12,39	25° 28'
				7,379	12,38	22° 23'

## Chlor-Lithium.

1,0595	23,3	5,708	4,235	9,059	17,10	37° 26'
	32,2	5,738	4,199	8,580	16,19	26° 52'
	33,4	5,766	4,250	8,792	16,60	30°
1,1233	20,9	5,758	4,210	8,810	16,96	31° 26'
	24,6	5,823	4,265	9,576	17,05	31° 18'
	29,0	5,818	4,263	9,665	17,21	32° 28'
				9,428	16,79	28° 38'
				9,556	17,01	30° 48'

## Chlor-Ammonium.

1,0360	31,2	5,726	4,259	8,632	16,66	33° 44'
	27,1	5,775	4,223	8,616	16,63	29° 32'
	26,9	5,737	4,197	8,513	16,44	29° 52'
				8,587	16,58	31° 9'
1,0758	27,3	5,806	4,239	9,001	16,74	28° 44'
	29,1	5,774	4,209	8,804	16,37	26° 16'
	25,8	5,714	4,207	8,915	16,58	33° 8'
				8,907	16,56	32° 43'

Spec. Gew. $\sigma$	$2r$	$K$	$K-k$	Cohäsion $\alpha$	Spec. Cohäsion $a^2$	Rand- winkel $\theta$	Spec.G $\sigma$
Chlor-Natrium.							
1,0865	mm. 26,5 23,8 22,1	mm. 5,729 5,694 5,679	mm. 4,202 4,067 4,026	mgr. 8,962 8,559 8,457	mm. 16,50 15,75 15,57	° mm. 31° 6' 21° 6' 16° 18'	1,08
1,1543	32,2 30,6 32,4	5,687 5,682 5,688	4,083 4,068 4,092	8,659 8,842 8,776 8,878	15,94 15,32 15,21 15,38	22° 50' 15° 8' 12° 46' 16° 38'	1,16 1,21
1,1574	26,8 31,7	5,514 5,530	4,071 4,075	8,832 8,954 8,831	15,30 15,47 15,26	14° 51' 33° 38' 30° 2'	1,30
1,2063	30,4 30,3 31,4 31,3	5,490 5,531 5,569 5,644	4,002 4,041 4,071 4,100	8,892 8,876 9,475 9,183 9,315	15,36 14,72 15,71 15,23 15,45	31° 50' 25° 6' 35° 24' 26° 22' 23° 14'	1,41
				9,324	15,46	27° 47'	
Chlor-Kalium.							
1,0487	21,2 22,1	5,667 5,656	4,061 4,062	8,366 8,305	15,96 15,84	23° 30' 24° 44'	1,07
1,0932	32,3 28,7 29,4	5,560 5,627 5,580	4,123 4,101 4,092	8,835 8,541 8,509 8,431	15,90 15,63 15,57 15,43	24° 7' 32° 30' 26° 36' 28° 32'	1,11
1,1471	29,2 29, 31,9 29,8	5,661 5,658 5,714 5,697	4,029 4,007 4,024 4,031	8,494 8,594 8,511 8,618	15,54 14,98 14,84 15,03	29° 13' 7° 22' — —	1,11
1,1709	32,7 32,9 31,3	5,630 5,584 5,648	4,032 4,041 4,028	8,564 8,748 8,788 8,732	14,93 14,94 15,01 14,91	1° 50' 12° 32' 20° 48' 7° 46'	1,11 1,21
				8,756	14,95	13° 42'	
Chlor-Magnesium.							
1,1385	24,0 30,6 31,0	5,789 5,761 5,779	4,136 4,111 4,106	9,181 8,837 8,817	16,13 15,52 15,49	19° 10' 8° 10' —	1,3
1,2824	27,8 28,9 31,1	5,719 5,717 5,712	4,149 4,154 4,152	8,945 10,26 10,23 10,15 10,21	15,71 16,01 15,95 15,83 15,93	9° 7' 25° 12' 24° 50' 23° 22' 24° 28'	1,2

Spec. Gew. $\sigma$	$2r$	$K$	$K-k$	Cohäsion $a$	Spec. Cohesion $a^2$	Rand- winkel $\theta$
Chlor-Calcium.						
6'	1,0813	mm. 23,0	mm. 5,641	mm. 4,077	mgr. 8,580	□ mm. 15,87
6'		27,2	5,590	4,066	8,332	15,41
18'					8,456	15,64
50'	1,1632	28,9	5,672	4,126	9,145	15,72
8'	1,2128	21,6	5,508	3,999	9,372	15,45
46'		25,0	5,487	4,062	9,410	15,52
38'					9,391	15,48
51'	1,3078	28,6	5,571	4,018	9,779	14,95
38'		30,0	5,596	4,048	9,847	15,06
2'					9,813	15,00
50'	1,3078	33,0*	5,554	4,023	9,721	14,87
6'		25,0*	5,528	4,010	9,888	15,12
24'					9,804	15,00
22'	1,4197	25,9	5,336	3,882	10,010	14,10
14'		28,7	5,398	3,919	10,090	14,21
17'		25,3	5,449	4,040	10,880	15,33
					10,327	14,55
						29° 35'
Chlor-Strontium.						
30'	1,0718	27,8	5,617	4,409	15,69	29° 2'
14'		28,2	5,605	4,114	8,416	15,70
7'		29,0	5,592	4,099	8,320	15,52
60'		28,9	5,601	4,088	8,281	15,45
6'					8,357	15,59
12'	1,1303	26,6	5,525	4,011	8,492	15,03
3'		28,8	5,494	3,995	8,341	14,76
12'		28,	5,501	3,998	8,395	14,86
2'		28,5	5,521	4,029	8,500	15,04
					8,432	14,92
0'	1,1327	24,9+	5,360	3,987	8,474	14,96
2'	1,2289	27,5	5,378	3,919	8,788	14,30
8'		28,6	5,392	3,902	8,664	14,10
6'		27,6	5,403	3,887	8,640	14,06
2'		29,4	5,448	3,914	8,668	14,10
					8,690	14,14
0'	1,3622	29,5	5,307	3,810	9,107	13,38
0'		30,4	5,310	3,817	9,116	13,39
7'		28,0	3,305	3,798	9,124	13,40
2'		31,0	5,334	3,869	9,367	13,75
0'		30,2	5,342	3,890	9,466	13,90
2'					9,236	13,56
8'	1,3620	25,7+	5,284	3,840	9,419	13,83
0'		25,6+	5,260	3,804	9,245	13,58
2'		28,0+	5,276	3,810	9,181	13,48
					9,282	13,63
						25° 19'

Spec.Gew. $\sigma$	$2r$	$K$	$K-k$	Cohäsion $\alpha$	Spec. Cohäsion $\alpha^2$	Rand- winkel $\theta$
-----------------------	------	-----	-------	----------------------	---------------------------------	-----------------------------

## Chlor-Barium.

1,0620	mm.	mm.	mm.	mgr.	□ mm.	
	22,7	5,626	4,061	8,377	15,78	26° 28'
1,1306	24,1	5,640	4,087	8,443	15,90	28° 44'
				8,410	15,84	27° 36'
1,2043	28,3	5,524	4,030	8,513	15,06	27° 20'
	29,3	5,513	4,053	8,568	15,16	29° 56'
1,2501	22,6	5,274	3,848	8,541	15,11	28° 38'
	24,2	5,305	3,893	8,525	14,16	31° 6'
	23,9	5,385	3,954	8,668	14,40	33° 38'
	27,9	5,382	3,945	8,964	14,88	33° 54'
	27,5	5,304	3,881	8,708	14,46	29° 50'
	26,6	5,306	3,902	8,716	14,48	32° 7'
				8,764	14,03	29° 26'
				8,890	14,22	32° 14'
				8,827	14,12	30° 50'

## Chlor-Mangan.

1,1876	27,4	5,565	3,992	8,810	14,84	18° 50'
	28,1	5,548	4,019	8,904	15,00	24° 16'
	28,2	5,615	4,029	8,945	15,07	18° 16'
1,3345				8,886	14,97	20° 27'
	26,7	5,402	3,921	9,583	14,36	26° 28'
	26,0	5,416	3,905	9,517	14,27	23° 14'
	27,3	5,430	3,902	9,469	14,19	20° 22'
				9,523	14,27	23° 21'

## Chlor-Eisen.

1,2126	16,5	5,372	3,879	9,543	15,74	29° 52'
	28,4	5,537	4,074	9,335	15,39	31° 12'
	28,1	5,536	4,020	9,097	15,01	25° 20'
	30,1	5,572	4,054	9,156	15,10	24° 0'
1,4135				9,283	15,31	27° 36'
	17,8	—	3,745	10,10	14,30	—
	19,5	5,196	3,674	9,401	13,30	15° 42'
	17,6	5,153	3,719	9,991	14,14	28° 38'
	17,0	5,107	3,683	9,926	14,05	28° 56'
				9,855	13,95	24° 25'

## VIII. Sulfate.

Spec. Gew. $\sigma$	$2r$	$K$	$K-k$	Cohäsion $a$	Spec. $a^3$	Rand- winkel $\theta$
------------------------	------	-----	-------	-----------------	----------------	-----------------------------

## Schwefelsäure.

28' 44'	1,0492	mm. 25,7	mm. 5,567	mm. 4,090	mgr. 8,222	□ mm. 15,68	32° 24'
36'		27,5	5,650	4,133	8,345	15,91	29° 26'
20'		26,5	5,653	4,100	8,241	15,71	26° 14'
56'					8,269	15,77	29° 21'
38'	1,2318	25,6	5,269	3,867	8,636	14,03	32° 14'
6'		31,1	5,253	3,800	8,172	13,90	20° 40'
38'		28,6	5,185	3,833	8,377	13,60	32° 46'
54'					8,395	13,84	28° 33'
50'	1,3621	25,5	4,985	3,663	8,572	12,59	32° 42'
7'		26,2	4,980	3,658	8,521	12,51	31° 56'
26'		23,8	5,009	3,650	8,644	12,70	31° 0'
14'					8,579	12,60	31° 53'
50'	1,5197	25,2	4,702	3,438	8,439	11,11	30° 54'
16'		28,2	4,618	3,343	7,879	10,37	23° 38'
16'		25,0	4,779	3,486	8,688	11,44	30° 14'
50'					8,335	10,97	28° 15'
18,371	34,6	3,750	2,702	6,191	6,742	17° 42'	
26,9		3,571	2,539	5,363	5,839	6° 2'	
28,0		3,702	2,675	5,970	6,501	21° 56'	
28,1		3,454	2,573	5,524	6,015	35° 30'	
27'				5,762	6,274	20° 17'	
28'							
14'							
22'							
21'							
52'							
12'							
20'							
0'							
36'	1,0526	30,8	5,709	4,027	7,843	14,90	—
21'		34,0	5,556	4,037	7,887	14,98	22° 52'
1,1564	31,0	5,345	3,887	8,026	7,865	14,94	11° 26'
32,7		5,374	3,893	8,048	8,026	13,88	23° 44'
34,4		5,285	3,873	7,971	8,048	13,92	21° 6'
25'					8,002	13,78	27° 8'
25'						13,86	24° 0'

## Schwefelsaures Natron.

1,0526	30,8	5,709	4,027	7,843	14,90	—
	34,0	5,556	4,037	7,887	14,98	22° 52'
1,1564	31,0	5,345	3,887	8,026	7,865	14,94
32,7		5,374	3,893	8,048	8,026	13,88
34,4		5,285	3,873	7,971	8,048	13,92
					8,002	13,78
						27° 8'
						24° 0'

## Schwefelsaures Kali.

1,0251	25,4	5,716	4,129	8,202	16,01	25° 6'
	26,3	5,728	4,121	8,134	15,87	21° 48'
1,0781	21,7	5,596	4,021	8,168	15,94	23° 27'
21,7		5,587	3,997	8,387	15,56	24° 36'
				8,290	15,38	22° 28'
				8,339	15,47	23° 32'

Spec. Gew. $\sigma$	2r	K	K-k	Cohäsion a	Spec. Cohäsion $a^3$	Randwinkel $\theta$	Spec. G.
							"
Schwefelsaure Magnesia.							
1,1390	mm.	mm.	mm.	mgr.	□ mm.	22° 12'	
	29,3	5,553	4,020	8,490	14,90	20° 22'	
	32,8	5,531	5,001	8,397	14,71	20° 4'	
	30,9	5,541	4,005	8,393	14,73	22° 36'	
1,2993	31,8	5,531	4,016	8,435	14,81		
				8,429	14,79	21° 18'	
	27,6	5,440	3,942	9,399	14,46	24° 56'	1,01
	30,1	5,461	3,947	9,301	14,32	20° 14'	
	29,6	5,461	3,906	9,135	14,06	12° 46'	
				9,278	14,23	19° 19'	1,09
Schwefelsaures Zinkoxyd.							
1,0910	24,2	5,563	4,024	8,395	15,39	27° 48'	
	26,3	5,586	4,008	8,189	15,01	20° 14'	
1,2187	22,3	5,296	3,803	8,292	15,20	24° 1'	
	23,6	5,380	3,823	8,461	13,89	24° 30'	
				8,484	13,93	16° 50'	
1,4168	23,3	5,088	3,677	8,472	13,91	20° 40'	
	25,9	5,020	3,654	9,133	12,89	26° 54'	
				8,851	12,49	28° 12'	
1,4539	33,5	5,017	3,681	8,992	12,69	27° 33'	
	27,6	5,043	3,644	9,051	12,46	28° 0'	
				8,989	12,37	23° 22'	
				9,020	12,41	25° 41'	1,20
Schwefelsaures Kupferoxyd.							
1.	27,3	5,846	4,255	8,440	16,88	27° 42'	
	28,3	5,842	4,212	8,230	16,46	21° 22'	
1 + x	26,3	5,849	4,208	8,335	16,67	24° 32'	
	28,9	5,850	4,150	8,270	16,54	21° 38'	
	28,1	5,855	4,141	8,017	15,92	—	
1,0664	27,5	5,680	4,168	8,017	15,92	—	
	25,8	5,715	4,189	8,624	16,17	30° 44'	
	27,7	5,706	4,167	8,760	16,43	31° 16'	
1,1144	27,5	5,680	4,168	8,612	16,15	28° 26'	
	28,2	5,631	3,975	8,666	16,25	30° 9'	
	28,1	5,624	4,000	8,170	14,67	—	
1,1859	28,5	5,656	4,010	8,279	14,86	10° 26'	1,09
	26,3	5,333	3,901	8,299	14,89	—	
	28,1	5,341	3,884	8,267	14,84	4° 21'	
1,1859	28,3	5,350	3,880	8,307	14,22	30° 8'	
	29,9	5,456	3,906	8,279	14,01	26° 10'	
	28,4	5,371	3,848	8,318	13,96	24° 30'	
	28,4 *	5,428	3,880	5,136	14,03	13°	
	28,2 *	5,394	3,880	8,295	13,72	16° 38'	
				8,314	13,97	22° 3'	
				8,283	14,00	16° 28'	
				8,299	14,00	19° 46'	
				8,299	14,00	18° 7'	

## IX. Nitrate und Carbonate.

Spec. Gew. $\sigma$	$2r$	$K$	$K-k$	Cohäsion $\alpha$	Spec. $a^3$	Rand- winkel $\theta$
------------------------	------	-----	-------	----------------------	----------------	-----------------------------

## Salpetersäure.

1,0110	mm.	mm.	mm.	mgr.	□ mm.	
	25,7	5,702	4,127	8,067	15,96	25° 40'
1,0915	25,9	5,657	4,109	7,986	15,80	27° 18'
	30,3	5,349	3,916	8,026	15,88	26° 29'
1,2068	30,1	5,358	3,938	7,776	14,09	27° 14'
	32,4	5,003	3,644	7,362	12,20	24° 16'
	30,2	4,953	3,647	7,372	12,22	29° 44'
	30,9	4,977	3,639	7,342	12,17	26° 28'
	29,8	5,015	3,652	7,399	12,27	24° 44'
				7,378	12,22	26° 18'

## Salpetersaures Natron.

1,2049	29,4	5,485	3,923	8,545	14,19	13° 0'
	28,8	5,507	3,920	8,565	14,22	9° 32'
	30,3	5,490	3,925	8,525	14,16	10° 42'
	32	5,463	3,927	8,538	14,17	15° 54'
1,3811	28,1	5,306	3,854	8,543	14,19	12° 15'
	27,0	5,310	3,810	9,528	13,80	25° 34'
	28,0	5,327	3,815	9,354	13,55	19° 46'
				9,337	13,52	17° 0'
				9,407	13,56	20° 43'

## Salpetersaures Kali.

1,0988	29,4	5,604	4,022	8,191	14,90	16° 6'
	39,1	5,623	4,036	8,221	14,96	15° 8'
	30,3	5,604	4,031	8,202	14,93	16° 50'
1,1398	30,8	5,445	3,939	8,205	14,93	16° 1'
	27,6	5,468	3,927	8,125	14,26	20° 40'
	28,1	5,479	3,952	8,181	14,35	19° 58'
	27,7	5,487	3,924	8,264	14,50	21° 38'
				8,164	14,32	22° 28'
				8,184	14,36	19° 17'

Spec.Gew.	$2r$	$K$	$K-k$	Cohäsion $\alpha$	Spec. Cohäsion $\alpha^2$	Rand- winkel $\theta$
$\sigma$						

## Kohlensaures Natron.

1,1213	mm.	mm.	mm.	mgr.	□ mm.	
	29,6	5,614	4,064	8,529	15,22	21° 46'
	30,0	5,591	4,084	8,592	15,32	26° 2'
	30,3	5,598	4,099	8,656	15,44	27° 14'
1,1670				8,592	15,33	25° 1'
	27,9	5,482	4,016	8,742	14,98	29° 32'
	31,7	5,465	3,994	8,555	14,67	26° 16'
	34,3	5,439	4,000	8,582	14,71	28° 56'
				8,626	14,79	28° 15'

Spec. G

 $\sigma$ 

0,997

0,979

0,948

## Kohlensaures Kali.

1,1631	29,4	5,610	3,987	8,519	14,65	—
	29,3	5,619	3,990	8,531	14,67	—
	29,5	5,659	3,965	8,407	14,45	—
	33,1	5,609	3,974	8,451	14,52	—
1,2342				8,477	14,57	0°
	30,0	5,486	3,944	8,816	14,29	16° 18'
	30,4	5,480	3,945	8,820	14,30	17° 22'
	31,5	5,496	3,929	8,757	14,18	10° 42'
1,2502	31,0	5,551	3,925	8,796	14,26	14° 48'
	31,0	5,491	3,972	8,847	14,16	—
				9,376	15,00	28° 18'
				9,111	14,58	14° 9'
1,2553	28,1	5,518	3,951	9,097	14,50	16° 38'
	27,6	5,534	3,962	9,168	14,61	17° 32'
	28,6	5,529	3,966	9,147	14,57	17° 32'
	30,2	5,524	3,961	9,046	14,42	14° 18'
	29,5	5,532	3,965	9,088	14,48	14° 44'
1,4444				9,129	14,52	16° 8'
	31,8	5,483	3,911	10,15	14,06	7° 22'
	30,1	5,518	3,925	10,22	14,16	6° 58'
	30,9	5,535	3,962	10,41	14,42	12° 18'
	33,3	5,498	3,959	10,40	14,41	17° 12'
1,5667				10,30	14,26	10° 57'
	29,0	5,555	3,995	11,54	14,74	18° 22'
	29,5	5,587	3,984	11,46	14,63	9° 50'
	29,5	5,560	3,984	11,46	14,63	14° 44'
	29,3	5,568	4,019	11,66	14,89	20° 22'
				11,53	14,72	15° 49'

1,117

1,233

1,033

1,03

1,07

## X. Organische Substanzen etc.

Spec. Gew. $\sigma$	$2r$	$K$	$K-k$	Cohäsion $\alpha$	Spec. Cohäsion $\alpha^2$	Rand- winkel $\theta$
Ammoniak.						
46' 2' 14' 1' 32' 16' 56' 15'	0,9976	mm. 27,6 24,7	mm. 5,710 5,688	mm. 4,130 4,145	mgr. 7,916 8,085	mm. 15,87 16,21
					8,000	24° 22' 30° 2'
	0,9798	27,8 24,8	5,590 5,638	3,953 3,937	7,117 7,151	16,04 14,53 14,61
					7,137	27° 12' —
	0,9487	25,7 27,7	5,419 5,422	3,903 3,913	6,772 6,756	14,57 14,28 14,24
					6,764	0° 23° 14' 22° 28' 22° 51'
Rohrzucker.						
18' 22' 42' 48'	1,1170	29,0 31,4 31,9 32,4	5,474 5,442 5,507 5,483	3,980 3,961 4,013 4,008	8,174 8,050 8,260 8,245	14,63 14,42 14,79 14,77
	1,2359	31,0 31,3 30,8 29,6	5,281 5,266 5,243 5,280	3,876 3,850 3,840 3,842	8,182 8,529 8,416 8,401	14,65 13,80 13,62 13,59
					8,429	24° 58' 28° 18' 26° 28' 24° 44'
						26° 43'
Hühner-Eiweiss.						
18' 22' 32' 32' 18' 44'	1,0384	30,1 30,1 35,8	4,610 4,717 4,666	3,330 3,423 3,372	5,194 5,589 5,426	10,00 10,76 10,45
					5,370	12° 32' 22° 44' 19° 18'
						18° 11'
Gerbsäure.						
18' 22' 58' 18' 12'	1,0352	24,6 22,5 22,7	4,724 4,740 4,863	3,438 3,422 3,478	5,773 5,808 5,989	11,15 11,22 11,57
					5,857	29° 20' 26° 46' 21° 30'
						25° 52'
Arabisches Gummi.						
57' 22' 50' 44' 22' 49'	1,0708	28,3 24,8 20,0	5,264 5,282 5,330	3,967 3,873 3,771	7,818 7,566 7,425	14,60 14,14 13,87
					7,603	39° 50' 32° 24' 14° 56' 29° 3'

Spec. Gew.	$2r$	$K$	$K-k$	Cohäsion $\alpha$	Spec. $\alpha^2$	Rand- winkel $\theta$
$\sigma$						

## Arabin.

1,0004	mm.	mm.	mm.	mgr.	mm	
	23,8	5,751	4,233	8,533	17,06	34° 40'
	25,8	5,774	4,204	8,269	16,54	28° 12'
	26,5	5,775	4,132	7,982	15,96	18° 12'
				8,261	16,52	27° 1'

## Alkohol.

0,9973	23,8	5,612	4,126	8,083	16,21	34° 16'
	26,1	5,617	4,148	8,024	16,09	34° 0'
	23,4	5,655	4,075	7,893	15,82	25° 34'
				8,000	16,04	31° 17'
0,9852	24,4	4,777	3,453	5,571	11,31	27° 16'
	29,3	4,768	3,436	5,367	10,89	19° 58'
	23,1	4,776	3,492	5,735	11,64	32° 2'
	24,4	4,751	3,504	5,745	11,66	35° 36'
	27,0	4,917	3,572	5,865	11,90	26° 42'
				5,657	11,48	28° 19'
0,9110	25,9	3,709	2,677	2,932	6,436	18° 22'
	26,0	3,740	2,703	2,991	6,567	19° 38'
	27,1	3,722	2,653	2,902	6,371	9° 32'
	27,4	3,737	2,672	2,963	6,504	15° 42'
				2,947	6,469	15° 49'
0,7904	22,9	3,585	2,579	2,330	5,869	11° 6'
	25,2	3,586	2,593	2,378	6,017	19° 0'
				2,354	5,956	15° 3'

Die Beobachtungen an flachen Luftblasen in der concentrierten Schwefelsäure können nur geringes Vertrauen beanspruchen, da durch Wasser-Anziehung aus der Luft sich Schlieren bilden, die die Einstellung des Mikroskops bedeutend erschweren.

Für schwefelsaures Kupferoxyd bedeutet  $1+x$ , daß dem destillirten Wasser eine Spur reine Kupfervitriollösung zugesetzt war, wodurch das specifische Gewicht also unmerklich grösser als 1 wurde.

Bei den Lösungen von kohlensaurem Natron und Kali zeigten sich an dem Planglas, unter dem die Luftblase lag, Newton'sche Farbenringe. Dieselben lagen symmetrisch zur Rotationsaxe der Luftblase. Am Rande, wo die capillare Oberfläche das Planglas berührte, erschien die dünne Flüssigkeitsschicht im reflectirten Lichte grau, dann folgten nach der Mitte Weiß, Orange, Blau, Grün, Violet. Die Dicke der Schicht nahm hiernach vom Rande nach der Mitte hin zu.

### § 5.

#### Vergleichung beider Beobachtungsmethoden.

In den folgenden Tabellen sind die nach beiden Methoden erhaltenen Resultate zusammengestellt.

Die mit  $S$  überschriebene Spalte giebt wieder den Salzgehalt, die Gewichtstheile wasserfreien Salzes, welches in 100 Gewichtstheilen Wasser gelöst war.

Ausser dem Werth des Randwinkels  $\theta$ , wie er aus den Messungen an flachen Luftblasen folgt, kann man auch den Randwinkel durch Combination der beiden Beobachtungsmethoden berechnen.

Aus den Gleichungen 2, 3 und 4 folgt

$$\frac{(\alpha)}{\alpha} = \cos \vartheta \quad \dots \quad (7),$$

und habe ich die nach dieser Gleichung berechneten Werthe von  $\vartheta$  in der letzten Spalte der folgenden Tabelle aufgeführt.

Die mit der Methode der Steighöhen in Capillarröhren gefundenen Werthe von  $(\alpha)$  und  $(\alpha^2)$  sind etwa 0,9 der mit flachen Luftblasen gefundenen.

Danach würde, entgegengesetzt der gewöhnlichen Annahme, Glas von wässrigen Salzlösungen nicht benetzt werden, und der Randwinkel etwa  $25^\circ$  statt  $0^\circ$  betragen.

Eine Ausnahme bilden nur concentrirte Schwefelsäure und Gerbsäure. Bei der ersten störten die Schlieren die Beobachtung der Luftblasen; bei der letzteren schien eine chemische Veränderung der Oberfläche der flachen Luft-

blasen einzutreten, da diese sich gleichsam mit einer unbeweglichen Haut überzog. Im Allgemeinen stimmen die nach beiden Methoden berechneten Werthe des Randwinkels  $\theta$  und  $\vartheta$  besser überein, als man bei so schwierigen Versuchen und so verschiedenen Beobachtungsmethoden erwarten kann.

Dazu kommt, dass das Glas der Capillarröhren mit dem Glase der Deckplatte des Glastroges nicht gleiche Zusammensetzung hatte.

Bei einigen Substanzen, wie Salpetersäure und Ammoniak wurden die Beobachtungen der capillaren Steighöhen an Flüssigkeiten von etwas anderem spezifischen Gewicht angestellt, als in der Tabelle XI aufgeführt ist, wie eine Vergleichung mit Tabelle III und IV ergiebt.

Für Arabisches Gummi und frisches Hühnereiweiß konnten der Klebrigkeits wegen keine Messungen an Steighöhen in Capillarröhren angestellt werden.

## XI.

No.	Substanz	Spec. Gew. $\sigma$	Salzgehalt $S$	Cohäsion ( $\alpha$ )	Spec. Cohäsion ( $a^2$ )	Flache Luftblasen Cohäsion $\alpha$	Spec. Cohäsion $a^2$	Flache Luftblasen Rundwinkel $\theta$	Blasen Rundwinkel $\vartheta$
1	Wasser	1,	0,0084	0, 7,35	migr. 14,70	8,415 16,83	29° 3°		
2	Chlor-Wasserstoff	1,0615	14,55	7,425 7,556	14,72 13,67	8,014 7,790	15,89 14,68	23 18 17 7	22° 21 19
	"			28,31	7,193	12,98	7,938	22 50	25 1
	"			64,57	6,771	11,39	7,379	22 23	23 25
3	Chlor-Lithium	1,0595	11,14	7,796	14,72	8,810 9,556	16,96 17,01	31 26 28 28	27 46 21 21
				25,14	8,403	14,75	9,587	31 9	27 7
4	Chlor-Ammonium	1,0360	13,30	7,643	14,75	8,907	16,56	32 43	24 47
	"			35,18	8,086	15,03	8,907	22 50	26 53
5	Chlor-Natrium	1,0865	13,27	7,724	14,22	8,659	15,94		
				25,61	8,038	13,93	8,832	14 51	24 30
	"			26,22	8,083	13,97	8,892	31 50	24 37
	"			37,55	8,418	13,97	9,324	15,36	
6	Chlor-Kalium	1,0487	8,03	7,430	14,17	8,335	15,46	27 47	25 28
				16,13	7,667	14,03	8,494	15,90	24 7
	"			1,1472	7,948	13,69	8,564	29 13	26 56
	"			1,1709	8,008	13,68	8,756	14,95	25 29
	"			1,3385	8,003	14,05	8,945	15,71	23 37
7	Chlor-Magnesium	1,2824	43,37	9,020	14,04	10,21	15,93	9 7	23 52
8	Chlor-Calcium	1,0813	10,33	7,627	14,11	8,456	15,64	24 28	26 30
								25 55	27 56
								26 55	25 35

No.	Substanz	$\sigma$	Spec. Gew.	Salzgehalt S	Capillarröhren		Flache Luftblasen		Blasen   Röhren	Randwinkel	$\theta$	$\beta$
					Cohäsion	Spec. Cohäsion $(\alpha^2)$	Cohäsion	Spec. Cohäsion $\alpha^2$				
8	Chlor-Calcium	1,1632	22,01		mgr.		9,145	15,72	25°	6°		
		1,2128	28,20	8,392	13,72		9,391	15,48	32	55		
		1,3078	46,62		13,64	10,327	14,55	15,00	20	32		
		1,4197	70,61	9,656	13,97	8,357	15,59	28	45	26	27	
9	Chlor-Stronitum	1,0718	7,27	7,484	13,97	8,432	14,92	26	22	25	26	
		1,1303	15,83	7,613	13,47	8,690	14,14	21	57	24	43	
		1,2289	29,11	7,893	12,85							
		1,3622	49,08	8,422	12,36	9,236	13,56	19	16	24	14	
10	Chlor-Barium	1,0620	7,11	7,475	14,07	8,410	15,84	27	36	27	16	
		1,1306	15,38	7,674	13,57	8,541	15,11	28	38	26	4	
		1,2043	24,76	7,672	12,78	8,716	14,48	32	7	28	19	
		1,2501	30,53	7,804	12,49	8,827	14,12	30	50	27	51	
11	Chlor-Mangau	1,1876	25,62	7,938	13,37	8,886	14,97	20	27	26	43	
		1,3345	49,61	8,521	12,77	9,523	14,27	23	21	26	29	
		1,2126	41,77	8,011	13,21	9,283	15,31	27	36	30	20	
		1,4135	66,43	8,549	12,10	9,855	13,95	24	25	29	48	
12	Schwefelsäure	1,0492	8,43	7,385	14,04	8,269	15,77	29	21	26	43	
		1,2318	45,14	7,741	12,57	8,395	13,84	28	33	22	47	
		1,3621	85,61	7,810	11,47	8,579	12,60	31	33	24	25	
		1,5197	16,1	7,675	10,10	8,335	10,97	28	15	22	56	
13	Schwefels. Natron	1,8371	180,4	5,992	6,52	5,762	6,27	20	17			
		6,12	7,532	14,31	7,865	14,94		11	26	16	44	
		1,0526										

Capillarröhren Flache Luftblasen Blasen | Röhren

No.	Substanz	Spec. Gew.	Salzgehalt S	Capillarröhren Cohäsion ( $\alpha$ )	Flache Luftblasen Cohäsion $\alpha^2$	Blasen Randwinkel $\theta$	Röhren	
							Spec. Cohäsion ( $a^2$ )	$\varphi$
14	Schwefels. Natron	1,1564	19,85	mgr. 13,30	mgr. 8,002	24° 0'	16° 7'	
15	Schwefels. Kali	1,0251	3,17	7,689 14,61	8,168 8,339	23 27	23 30	
16	Schwefels. Magnesia	1,0781	10,00	7,490 7,460	15,94 15,47	23 32	26 33	
17	Schwefels. Zinkoxyd	1,1390	14,99	7,605 8,137	8,429 9,278	21 18	25 33	
18	Schwefels. Kupferoxyd	1,2993	35,98	12,53 7,487	14,28 8,292	19 19	28 43	
	"	1,0910	9,28	13,72	15,20	24 1	25 28	
	"	1,2187	22,59	7,499 7,499	13,91 8,472	20 40	27 44	
	"	1,4168	45,88	7,971 8,091	11,26 9,020	12,69 12,41	27 33 26 41	
	"	1,4539	50,59	11,13 7,389	14,66 8,017	15,92 16,25	26 14 22 55	
	"	1,0071	0,58	14,66 7,458	8,666 13,98	30 9	30 36	
	"	1,0664	6,40	13,47 13,47	8,267 14,84	4 21	24 49	
	"	1,1144	11,61	7,504 7,550	12,73 8,295	13,99 15,88	22 5 26 29	
	"	1,1859	19,64	14,43 13,15	8,026 7,733	14,17 12,22	24 40 21 49	
19	Salpetersäure	1,0110	2,20	18,08 12,068	13,15 11,58	26 9 12,22	18 38	
	"	1,0915	18,08	7,180 6,992	7,733 7,378	14,17 12,22	21 49 26 18	
20	Salpeters. Natron	1,2068	50,10	12,89 7,768	8,543 12,89	14,19 12,15	24 37	
	"	1,2049	37,27	8,299 8,299	12,02 9,406	13,56 14,93	20 43 16 1	
21	Salpeters. Kali	1,3811	84,88	17,46 7,462	13,58 8,205	14,36 13,20	24 36 19 17	
	"	1,0988	17,46	7,462 7,525	13,58 8,184	15,33 13,69	23 9 25 1	
22	Kohlens. Natron	1,1398	25,80	12,90 7,674	8,592 13,69	15,33 13,21	26 44 28 15	
	"	1,1213	12,90	7,674 7,712	8,626 13,21	14,79	26 36	
	"	1,1670	18,40					

No.	Substanz	Spec. Gew.	Salzgehalt S	Capillarröhren		Flache Lufthälsen		Blasen		Röhren
				Cohäsion (α)	Spec. Cohäsion (α <sup>2</sup> )	Cohäsion (α)	Spec. Cohäsion (α <sup>2</sup> )	θ	β	
23	Kohlens. Kali	1,1631	20,60	mgr.	13,52	mgr.	14,57	22° 36'		
		1,2342	29,72	7,828	12,96	8,796	14,26	24° 39'		
		1,2502	34,05	8,054	12,88	9,111	14,58	14° 48'		
		1,2553	34,88	8,165	13,01	9,129	14,52	14° 9	27	53
		1,4444	72,63	9,386	13,00	10,30	14,26	16° 8	26	34
		1,5667	104,9	10,81	13,80	11,53	14,72	10° 57	24	18
24	Ammoniak	0,9985	0,41	7,275	14,57			15° 49	20	21
		0,9976	0,64	7,297	14,57	8,000	16,04	27	12	25
		0,9798	5,04	6,807	13,89	7,137	14,57	17	30	
		0,9487	14,72	6,344	13,36	6,764	14,26	22	51	20
		0,9390	18,64	6,246	13,30					
		1,1170	37,67	7,496	13,42	8,182	14,65	24	58	23
25	Rohrzucker	1,2359	102,2	7,643	12,37	8,429	13,64	26	43	24
		1,0384	10	7,250	14,01	5,370	10,40	18	11	
		1,0352	20			5,857	11,31	25	52	
		1,0708	0,5	7,306	14,61	7,603	14,20	29	3	
		1,0004				8,261	16,52	27	1	27
		0,9973	1,19	6,866	13,77	8,000	16,04	31	17	30
26	Hühner-Eiweiss	0,9852	9,84	5,066	10,29	5,657	11,48	28	19	26
		0,9110	111,68	2,828	6,21	2,947	6,47	15	49	16
		∞		2,294	5,80	2,354	5,96	15	3	12
		0,7904								57

(Fortsetzung im nächsten Heft.)

**II. Zur Theorie der stationären elektrischen  
Strömung in gekrümmten Flächen;  
von A. Töpler.**

---

Mr. Prof. Kirchhoff hat in einer sehr interessanten Abhandlung (Monatsber. d. Königl. Akademie der Wissensch. zu Berlin, 19. Juli 1875) auf analytischem Wege gezeigt, daß zwischen dem Problem der elektrischen Strömung in gekrümmten, leitenden Flächen und dem Problem der in den kleinsten Theilen ähnlichen (der sogen. conformen) Abbildung von krummen Flächen auf einer ebenen die innigste Beziehung stattfindet, derart, daß mit der Lösung des einen Problems zugleich das andere gelöst ist.

Da dieser Gegenstand für die Untersuchung der Stromverbreitung in Flächen wichtig ist, so halte ich es nicht für unnütz zu zeigen, daß die in Rede stehende Beziehung ganz unmittelbar aus der Definition der conformen Abbildung einerseits und aus den Grundbedingungen der stationären elektrischen Strömung andererseits gefolgert werden kann und zwar in einer Weise, welche die physikalische Seite des Gegenstandes mit voller Allgemeinheit klarlegt. Zugleich möchte ich auf einige Folgerungen für die Berechnung des Leitungswiderstandes durchströmter Flächen aufmerksam machen, welche sich auf das Abbildungsproblem stützen<sup>1</sup>).

1) Auf die Untersuchung der Strömung in ebenen Flächen hat schon Heine (Borchardt's Journal Bd. 79) das Abbildungsproblem angewandt. Kirchhoff beweist die Gültigkeit der Beziehung beider Probleme allgemein für beliebige gekrümmte Flächen. Es sey mir zu erwähnen gestattet, daß ich die oben mitgetheilte Betrachtungsweise, soweit sie sich auf die Strömung zwischen zwei Elektroden beschränkt, schon vor mehreren Jahren benutzt habe, um in meinen Vorlesungen gerade so, wie es jetzt Kirchhoff gezeigt hat, die Strömung auf der Kugel aus der in der unendlichen Ebene durch stereographische Abbildung abzuleiten, wodurch die von Prof. Boltzmann (1865) analytisch gegebene Lösung dieser Aufgabe vereinfacht

Denkt man sich eine gekrümmte leitende Platte von überall gleicher, unendlich kleiner Dicke, — eine leitende Fläche, wie sie Kirchhoff nennt —, und denkt man sich bei einer stattfindenden Strömung die Fläche durch ein System unendlich benachbarter Strom- und isoelektrischer Linien (Linien gleichen Potentials) in rechteckige Flächenelemente zerlegt, so ergiebt die conforme Abbildung dieses Liniennetzes auf einer zweiten Fläche eine Figur, welche wiederum aus Rechtecken besteht. Setzt man die willkürliche, unendlich kleine Flächendicke ( $\delta$ ) sowie das specifische Leitungsvermögen ( $k$ ) in beiden Fällen der Einfachheit halber als gleich voraus, so genügt der Umstand, dass ähnliche Rechtecke stets gleichen Widerstand haben für Elektricitätsbewegung, welche über entsprechende Seiten der Rechtecke ein- und austritt, um einzusehen, dass die Bildfigur wiederum ein zu einer möglichen Elektricitätsbewegung gehöriges System von Strom- und isoelektrischen Linien darstellt. Dies zeigt die folgende Betrachtung:

I. Es werde einer leitenden Fläche Elektricität zu- und abgeführt, indem durch elektromotorische Kräfte auf zwei gegebenen Curven  $Q_1$  und  $Q_2$  (den Elektrodencurven) konstante, aber von einander verschiedene Potentiale ( $V_1$  und  $V_2$ ) erhalten werden. Die Elektrodencurven stellen wir uns vorläufig als geschlossene Linien im Innern der Fläche vor, welche sich weder schneiden, noch berühren, noch umschließen. Die Strömung geschieht so, dass die Stromlinien in den Elektrodencurven senkrecht ein- und austreten. Die Flächenränder (Gränzen) werden Stromlinien.

Wir denken uns nun das durchströmte Feld durch eine

wird. Letzterer, welchem ich meine Lösung mittheilte, hat dann noch andere, auch hydrodynamische Probleme nach der Abbildungsmethode gelöst, jedoch ebenfalls ohne Veröffentlichung der Resultate. Selbstverständlich soll durch diese nachträgliche Erwähnung in keiner Weise der Priorität zunahe getreten werden, welche Kirchhoff's schöner Abhandlung gebührt.

unendliche Schaar unendlich benachbarter Strom- und isoelektrischer Linien in kleine Rechtecke zerlegt, wobei wir nur der Bequemlichkeit halber die isoelektrischen Linien so wählen wollen, daß von je einer zur nächstfolgenden das Potential einen constanten Zuwachs  $dV$  erfährt. Wir betrachten einen Flächenstreifen zwischen zwei benachbarten Stromcurven, welcher aus einer Reihe von rechtwinkligen Elementen besteht. Bedeuten  $d\xi$  und  $d\eta$  die längs der Stromlinien resp. senkrecht darauf gemessenen Dimensionen eines dieser Elemente, so fliesst durch dasselbe in der Zeiteinheit bekanntlich die Elektricitätsmenge

$$di = - \frac{dV}{d\xi} k \delta d\eta \dots \dots \quad (1).$$

Da durch die Stromlinien weder Elektricität ein- noch austritt, so ist  $di$  zugleich die überhaupt in der Zeiteinheit durch den ganzen Streifen fliesende Elektricität, oder auch

$$di = \frac{V_1 - V_2}{\sum \frac{d\xi}{k \delta d\eta}} = \frac{V_1 - V_2}{w} \dots \dots \quad (2),$$

wobei  $\frac{d\xi}{k \delta d\eta}$  der Widerstand eines Elementes, und die Summe über alle Elemente des Streifens zu erstrecken ist. Die Bewegung ist, als ob der Streifen durch die Stromcurven isolirt wäre. Nun werde die gegebene Fläche mit dem ganzen Liniensysteme auf eine zweite Fläche in den kleinsten Theilen ähnlich abgebildet, wobei also rechte Winkel des Originals im Allgemeinen wieder als solche im Bilde zum Vorscheine kommen. Wir setzen zugleich voraus, daß die Gränzen des Originals sich in den Gränzen der Bildfläche abbilden. Im Bilde wollen wir alle entsprechenden Größen durch die accentuirten Buchstaben des Originals bezeichnen. Seyen somit  $Q'_1$  und  $Q'_2$  die Bilder der Elektrodencurven, so denke man sich die Bildfläche für einen Augenblick längs der Stromlinienbilder aufgeschnitten, so daß getrennte Leiterstreifen entstehen, aus welchen seitlich keine Elektricität in die Nachbar-

streifen treten kann<sup>1)</sup>); jedoch bleiben die Bildstreifen mit den Curven  $Q_1$  und  $Q_2$  in leitendem Zusammenhange. Vorläufig hat das Liniensystem der Bildfläche nur geometrische Bedeutung.

Wir fassen jenen Bildstreifen ins Auge, welcher dem oben betrachteten Streifen des Originals entspricht. Der selbe besteht aus einer gleichen Anzahl rechteckiger Elemente und zwar sind die Widerstände dieser Elemente denen des Originals gleich. Daher stimmen auch die Widerstände der ganzen Streifen überein. Nunmehr wecken wir auf den Elektrodencurvenbildern die willkürlichen, constanten Potentiale  $v_1$  und  $v_2$ . Es fließt durch den Bildstreifen in der Zeiteinheit die Elektricität

$$di' = \frac{v_1 - v_2}{w} = \frac{v_1 - v_2}{V_1 - V_2} di = n di \quad . \quad (3).$$

Der Factor  $n$  hat für das benachbarte Streifenpaar im Bilde und Original, sowie für alle übrigen, denselben Werth, d. h. die strömende Elektricität vertheilt sich auf die getrennten Bildstreifen wie auf die Streifen des Originals.

Nun lässt sich aber sofort erkennen, dass die so beschaffene Bewegung auch nach Wiedervereinigung der Bildstreifen fortbesteht. Betrachten wir nämlich das rechteckige Bildelement mit den Seiten  $d\xi'$  und  $d\eta'$ , welches dem früher betrachteten  $d\xi d\eta$  des Originalstreifens entspricht, so fließt in ihm pro Zeiteinheit gleichfalls die Elektricitätsmenge  $di'$  und es ist

$$di' = -\frac{dv}{d\xi'} k \delta d\eta' = n \cdot di \quad . \quad (4),$$

wobei  $dv$  der Potentialzuwachs der Strecke  $d\xi'$  ist. Da nun  $\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{d\xi'}{d\eta'}$ , so folgt durch Vergleichung mit (1), dass  $dv = ndV = \text{const.}$  Da endlich die Potentialwerthe übereinstimmen im Ursprunge aller Bildstreifen, so herrscht constantes Potential auf jedem Bilde einer isoelektrischen

1) Man könnte sich auch die Stromcurvenbilder für die obige Betrachtung als nichtleitende Scheidewände quer durch die Flächendicke vorstellen.

Curve. Diese Bilder sind also selbst isoelektrische Linien über das System der getrennt gedachten Bildstreifen.

Nun kann man bei getrennten Stromleitern bekanntlich Orte gleichen Potentials leitend verbinden, ohne die vorhandene Strömung zu ändern. Man kann also auch die getrennten Bildstreifen seitlich wieder vereinigen, ohne Änderung der Bewegung, d. h. die Bilder der Stromcurven sind selbst Stromlinien. Das abgebildete Liniensystem stellt somit eine bestimmte in der Bildfläche mögliche Elektricitätsbewegung dar, nämlich die, bei welcher die Elektricität durch die Bilder der Elektrodencurven ein- und austritt.

Man ersieht aus obiger Darstellung ohne Weiteres, daß dieselbe auf den Fall beliebig vieler Elektrodencurven ausgedehnt werden kann, da die Stromlinien, ohne sich zu kreuzen, das Feld immer in ein System von Streifen zerlegen, welche von einer zu einer anderen Elektrode verlaufen. Hat man auf den Elektrodencurven  $Q_1, Q_2, Q_3 \dots$  des Originals die Potentiale  $V_1, V_2, V_3 \dots$ , und denkt man sich wie oben die Bildfläche längs der Stromcurvenbilder aufgeschnitten, die Elektrodenbilder aber mit den Potentialen  $v_1, v_2, v_3 \dots$  besetzt, so folgt für die Strömung in den Streifen ein System von Relationen von der Form:

$$di_0 = \frac{v_1 - v_2}{V_1 - V_2} \cdot di_0 = n_0 di_0$$

$$di_1 = \frac{v_1 - v_3}{V_1 - V_3} \cdot di_1 = n_1 di_1$$

: : :

wobei sich die Indices 0, 1, 2 ... auf die Strömung zwischen  $Q_1 Q_2, Q_1 Q_3 \dots$  resp. deren Bilder beziehen. Man ersieht, daß die Werthe der  $n$  über die ganze Bildfläche constant werden, wenn die Potentialdifferenzen auf entsprechenden Elektroden des Originals und Bildes proportional gewählt werden. Für diesen Fall ist wie oben die Vereinigung der getrennten Bildstreifen erlaubt, und es gilt dieselbe Schlussfolgerung.

Die Grundvoraussetzung der oben mitgetheilten Ueberlegung besteht darin, daß einander entsprechende Flächenstreifen in Original und Bild gleichviel rechteckige Flächenelemente paarweise gleichen Widerstandes enthalten. Es ist dabei unwesentlich, ob diese Elemente unendlich kleine Flächengrößen gleicher oder verschiedener Ordnung sind. Dies genügt, um die Betrachtung auf besondere Fälle, namentlich auf diejenigen von sogenannten Punktelektroden, auszudehnen.

Die Elektrodencurven können unbeschadet der Richtigkeit obiger Anschauung einander umschließen. Auch können die Elektrodencurven ungeschlossene Linien seyn, wobei sie als schmale Flächenstreifen in die Betrachtung einzuführen sind. Endlich kann die Ein- und Ausströmung auch in von einander getrennten, mit constanten Potentialen besetzten Theilen der Flächenränder geschehen, wobei die nicht besetzten Randtheile Stromcurven werden.

Wir gehen nun zu dem gewöhnlich bei Flächenströmung gemeinten Falle, daß die Ein- und Ausströmung in sogenannten Punktelektroden geschieht, und zwar betrachten wir der Kürze halber nur den Fall zweier Elektrodenpunkte, da sich der Fall beliebig vieler Einströmungspunkte nach dem mitgetheilten von selbst erledigt. Man hat an Stelle der sogenannten Einströmungspunkte, welche physikalisch keinen Sinn haben, unendlich kleine Kreise als Elektrodencurven in die Betrachtung einzuführen<sup>1)</sup>. Die diesen Kreisen unendlich benachbarten isoelektrischen Linien sind ebenfalls unendlich kleine und zwar zu ersten concentrische Kreise, falls, wie vorausgesetzt wird, die Elektroden einen endlichen Abstand auf der Fläche haben. Aus diesen beiden Kreissystemen kann man ein beliebiges Paar Kreise herausgreifen und als Elektrodenkreise betrachten, da jede isoelektrische Linie einer Flächenströmung als Einströmungskurve gelten kann. Bei der conformen Abbildung auf eine zweite Fläche erscheinen

1) Es ist indessen nicht gemeint, daß die Betrachtung ihre Gültigkeit verliert für unendlich kleine Elektrodencurven, die nicht Kreise sind.

nun unendlich kleine, concentrische Kreissysteme wieder als solche im Bilde. Wählt man daher im Original und Bilde aus den vier Kreissystemen zwei Paare entsprechender Kreise zu Elektrodencurven, so gilt die obige Schlussfolgerung, obgleich sich in diesem Falle die rechteckigen Flächenelemente zwischen den Strom- und isoelektrischen Linien in der Nähe der Elektroden unendlich zusammenziehen.

Um nun für die folgende Betrachtung einen möglichst kurzen Ausdruck zu gewinnen, so soll unter *Strömungsnetz* einer gegebenen Elektricitätsbewegung ein solches System unendlich benachbarter Strom- und isoelektrischer Linien verstanden werden, bei welchen zwischen je zwei isoelektrischen Linien konstanter Potentialzuwachs, zwischen je zwei benachbarten Stromlinien jedoch die gleiche fließende Elektricitätsmenge stattfindet. Alle Maschen eines solchen Netzes sind *untereinander* ähnliche Rechtecke.

Mit dieser Bezeichnung gilt somit allgemein der Satz, dass *die conforme Abbildung eines Strömungsnetzes wieder das Strömungsnetz einer möglichen Elektricitätsbewegung ist*, vorausgesetzt, dass die Gränzen der auf einander bezogenen Flächen Bilder von einander sind. Dies ist in geometrischer Fassung der Hauptpunkt der Kirchhoff'schen Entwicklung.

II. An das Vorausgeschickte knüpfen sich noch einige sehr einfache Betrachtungen. Zunächst ist durch das Vorhergehende bereits bewiesen, dass, wenn die Ein- und Ausströmung auf zwei Curven erfolgt, und wenn man in dem conformen Bilde gleiches Leitungsvermögen und gleiche Plattendicke voraussetzt, *der gesamme Leitungswiderstand des Originals gleich ist dem Widerstände der Bildfläche zwischen den Bildern der Elektrodencurven*. Dies kann unter Umständen als Hülfsmittel für die Rechnung dienen.

Bildet man z. B. mit Kirchhoff einen Cylinder vom Radius 1 auf die Ebene ab, indem man die Lage eines Punktes des Cylinders durch seine Höhe  $z$  über einem festen Querschnitt und durch den Winkel  $\alpha$  bestimmt, den

die durch den Punkt und die Axe gelegte Ebene mit einer festen Ebene durch die Axe bildet, und nennt man andererseits  $r$  und  $u'$  die Polarcoordinaten in der Ebene, so ist die Abbildung gegeben durch die Beziehung:

$$u = u'; z = \lg(r).$$

Aus dem Widerstände der Cylinderfläche zwischen zwei Querschnittskreisen in dem Abstande  $z_2 - z_1$  und zwar:

$$\frac{z_2 - z_1}{2\pi k d},$$

ergiebt sich unmittelbar der Widerstand der Ebene zwischen den concentrischen Elektrodenkreisen mit den Radien  $r_2$  und  $r_1$ . Er ist, wie bekannt,

$$\frac{1}{2\pi k \delta} \lg\left(\frac{r_2}{r_1}\right).$$

Ebenso einfach findet sich der Widerstand der Kugelfläche zwischen zwei parallelen Einströmungskreisen, wenn man die obige Cylinderfläche vermittelst der bekannten Mercatorsprojection auf die Kugel abbildet. Man findet

$$\frac{1}{2\pi k \delta} \left[ \lg \frac{R + \sqrt{R^2 - \varrho_2^2}}{\varrho_2} \pm \lg \frac{R + \sqrt{R^2 - \varrho_1^2}}{\varrho_1} \right],$$

wobei  $R$  den Kugelradius,  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  die Radien der Elektrodenkreise bedeuten, und das obere oder das untere Zeichen gilt, je nachdem letztere Kreise auf entgegengesetzten Seiten des Kugelaquators liegen oder nicht.

Einer besonderen Erwagung bedarf indessen der Fall, daß Punktelektroden abgebildet werden. Hier hat die obige Relation keine Anwendung; jedoch tritt an Stelle derselben ein nicht minder einfacher Satz. Man pflegt sich bei der Widerstandsberechnung in diesem Falle zwei unendlich dünne, cylindrische Drähte von gegebenen Radien senkrecht auf die leitende Fläche in jenen Punkten aufgesetzt zu denken, so daß die Strömung zwischen den Endkreisen dieser Drähte stattfindet. Kommen dann dieselben Poldrähte bei zwei auf einander abgebildeten Flächen zur Anwendung, so sind die Elektrodencurven im Bilde im Allgemeinen nicht mehr Bilder der Elektrodencurven

des Originals. Dies wäre nur dann der Fall, wenn zufällig die Bilder der Elektrodenkreise gleiche Größe hätten mit ihren Originalen. Seyen die Radien der Elektrodendrähte  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$ , deren Bilder  $\varrho'_1 = \varrho_1\beta_1$  und  $\varrho'_2 = \varrho_2\beta_2$ , wo  $\beta_1$  und  $\beta_2$  die linearen Bildgrößenverhältnisse bedeuten, welche bei der Abbildung an den Elektrodenpunkten stattfinden, so würde der Widerstand wie oben der gleiche seyn, wenn im Bilde Drähte mit den Radien  $\varrho'_1$  und  $\varrho'_2$  zur Anwendung kämen. Setzt man jedoch *dieselben* Drähte des Originals concentrisch auf die Bilder ihrer Endquerschnitte, so erfährt das Bild des Stromfeldes an beiden Elektroden einen Zuwachs in Form zweier unendlich kleiner, ebener Ringflächen. Man erkennt sofort, daß zu dem Widerstände des Originals an jeder Elektrode ein Widerstand von der Form

$$\frac{1}{2\pi k\delta} \lg \left( \frac{\varrho'}{\varrho} \right) = \frac{1}{2\pi k\delta} \lg (\beta)$$

hinzukommt, welcher positiv oder negativ ist, je nachdem  $\beta > 1$  ist. Wird also eine Strömung zwischen zwei Punktelektroden auf einer zweiten Fläche abgebildet, so ist unter Voraussetzung *derselben* unendlich kleinen Elektrodenkreise der Widerstand  $W'$  der Bildfläche durch den Widerstand  $W$  des Originals und die an den Elektrodenpunkten stattfindenden linearen Bildgrößenverhältnisse  $\beta_1$  und  $\beta_2$  bestimmt, es ist stets:

$$W' = W + \frac{1}{2\pi k\delta} \cdot \lg (\beta_1 \cdot \beta_2) \quad . \quad (5).$$

Diese Relation leidet insofern an einer Unvollkommenheit, als sie nur strenge richtig ist für unendliche Werthe  $W$  und  $W'$ , in diesem Falle aber das endliche Glied neben  $W$  verschwindet. Derselbe Widerspruch besteht indessen bei allen Widerstandsformeln, welche logarithmisch unendlich werden, denn wenn wir z. B. keinen Anstand nehmen, den Widerstand der unendlichen Ebene für Elektrodenkreise mit den Radien  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  im Abstande  $A$  durch

$$C \lg \frac{\varrho^2}{\varrho_1 \varrho_2} = W,$$

wobei

$$C = \frac{1}{2 \pi k \delta}$$

ist, auszudrücken, so gilt dies strenge auch nur für unendlich kleine  $\varrho$ . Gehen wir zu einem anderen Abstande, z. B.  $m A$  über, wobei  $m$  eine endliche Verhältniszahl bedeutet, so nimmt der Widerstand um  $2 \lg m$  zu, d. h. der unendliche Widerstand wächst um eine endliche Größe. Diese Formeln haben also selbstverständlich nur den physikalischen Sinn, dass sie von sehr kleinen, aber endlichen Elektrodenkreisen um so näher erfüllt werden, je kleiner dieselben sind<sup>1)</sup>.

Ich habe die Relation (5) hauptsächlich deshalb mitgetheilt, um zu zeigen, dass das Abbildungsproblem den Schlüssel zu einigen Resultaten giebt, welche bei Widerstandsberechnungen gelegentlich aufgefallen sind. Boltzmann bemerkte in seiner schönen Untersuchung „über die Bewegung der Elektricität in krummen Flächen“ (Sitzungsberichte der Wiener Academie vom 20. Juli 1865), dass, wenn man durch zwei fixe, als Elektroden gedachte Raumpunkte successive beliebige Kugelflächen, oder die unendliche Ebene legt, der Widerstand in allen Fällen derselbe ist, wenn man dieselben unendlich dünnen Zuleitungsdrähte, und Flächen mit gleichem  $k$  und  $\delta$  voraussetzt.

Dies folgt als eine Nothwendigkeit unmittelbar aus Relation (5), denn die stereographische Abbildung jeder durch zwei Raumpunkte gelegten Kugelfläche auf eine durch dieselben Punkte gelegte Ebene hat in diesen Punkten das Bildgrößenverhältnis Eins.

Man kann dieses Resultat in analoger Weise auf Cylinderflächen ausdehnen. Es werde zunächst eine unend-

1) Hr. K. Domalip (Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss. in Wien vom 24. Juli 1873) hat in der That die Kirchhoff'sche Widerstandsformel für die Kreisscheibe durch Messungen an einer dünnen Flüssigkeitsplatte mit unpolarisirbaren Elektroden sehr gut bestätigt gefunden.

liche Ebene auf eine Kreiscylinderfläche vom Radius  $R$  abgebildet. Wie oben bestimmen wir einen Cylinderpunkt durch seinen Höhenabstand  $z$  von einem festen Querschnitte und durch seinen Winkelabstand  $u$  von einer festen durch seine Axe gelegten Ebene. Bedeuten andererseits  $r$  und  $u'$  die Polarkoordinaten in der unendlichen Ebene, welche abgebildet wird, so setzen wir

$$u = u' \text{ und } z = R \lg r.$$

Zwei Elektrodenpunkte in der Ebene seyen gegeben durch  $r_1$  und  $r_2$  und den Winkelabstand  $u_2 - u_1 = \alpha$ , so ist der Widerstand beim Anlegen von Drähten mit den Radien  $\rho_1$  und  $\rho_2$

$$C \cdot \lg \left[ \frac{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \alpha}{\varrho_1 \varrho_2} \right].$$

Das Bildgrößenverhältnis für die Abbildung der Elektrodenpunkte ist  $\frac{R}{r_1}$  resp.  $\frac{R}{r_2}$ . Heissen  $z_2$  und  $z_1$  die Koordinaten der Elektrodenbilder auf dem Cylinder, so folgt für den Widerstand auf letzterem aus Formel (5)

$$C \cdot \lg \left[ \frac{\frac{2z_2}{e^{\frac{R}{r_1}}} + \frac{2z_1}{e^{\frac{R}{r_2}}} - 2e^{\frac{z_2-z_1}{R}} \cdot \cos \alpha}{\frac{z_2+z_1}{R}} \right] R^2.$$

Setzt man den längs der Cylinderaxe gemessenen Abstand der Elektrodenpunkte  $z_2 - z_1 = D$ , so giebt eine leichte Umformung

$$C \cdot \lg \left[ \frac{\frac{2D}{e^{\frac{R}{r_1}}} + 1 - 2e^{\frac{D}{R}} \cdot \cos \alpha}{\frac{D}{R}} \right] R^2,$$

welcher Ausdruck selbstverständlich sein Minimum für  $\alpha = 0$  und sein Maximum für  $\alpha = \pi$  hat.

Liegen die Punkte auf demselben Cylinderquerschnitt, wobei  $D = 0$  wird, so ist der Widerstand

$$C \cdot \lg \frac{2(1 - \cos \alpha) R^2}{\varrho_1 \varrho_2} = C \cdot \lg \frac{\left(2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot R\right)^2}{\varrho_1 \varrho_2}.$$

Da  $2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot R$  der geradlinige Abstand  $A$  der Elektrodenpunkte ist, so ist also der Widerstand gleich dem einer durch dieselben Punkte gelegten unendlichen Ebene und von  $R$  unabhängig. Dieses Resultat folgt auch unmittelbar, da das Bildgrößenverhältnis für die Abbildung des Cylinders auf die Querschnittsebene in allen Punkten des Durchschnittskreises = 1 ist.

Da ferner die Querschnittsfigur der durchströmten Cylinderfläche vom Radius  $R$  beliebig geändert werden kann, ohne dass sich die Elemente des Strömungsnetzes ändern, wenn der Umfang ungeändert bleibt, so folgt, dass der Widerstand zwischen zwei festen Raumpunkten bei ungeänderten Elektrodendrähten gleich groß wird für alle durch die Punkte gedachten Kugel- und Cylinderflächen mit beliebigem Querschnitt, wenn letztere auf einer durch die Punkte gelegten Ebene senkrecht stehen, er wird stets gleich dem Widerstände einer unendlichen Ebene durch die Punkte.

Aus der im Eingange entwickelten Betrachtung ersieht man leicht, dass das Strömungsnetz einer gegebenen Elektricitätsbewegung zwischen zwei Elektroden geometrisch auch gedeutet werden kann als das Netz einer in allen Flächentheilen zur ersten Bewegung senkrecht verlaufenden Strömung, wobei die Strom- und isoelektrischen Linien ihren Sinn vertauschen. So gilt z. B. das System der isoelektrischen und Strömungskreise, welches die Elektricitätsbewegung zwischen zwei Kugelpunkten darstellt, auch als Netz für die Strömung, welche erhalten wird, indem man die Kugelfläche längs eines die beiden Punkte verbindenden Kreisbogens aufschneidet und diese Schnittlinie beiderseits mit constanten, aber verschiedenen Potentialen besetzt<sup>1)</sup>.

Denkt man sich das Strömungsnetz für irgend einen

1) An den Endpunkten dieser Schnittlinie, dort wo vorher die Ein- und Ausströmung stattfand, hat man sich außerdem unendlich kleine Kreise aus der Fläche ausgeschnitten zu denken.

Flächenstrom zwischen zwei Elektroden, denkt man sich ferner ein beliebiges Paar Stromlinien  $\xi_1$  und  $\xi_2$ , desgleichen ein Paar isoelektrischer Linien  $\eta_1$  und  $\eta_2$ , so begränzen diese Curven ein viereckiges Flächenfeld. Denkt man sich dieses längs jener Curven herausgeschnitten, so besteht dieselbe Strömung fort, wenn man  $\eta_1$  und  $\eta_2$  mit constanten Potentialen besetzt. Dasselbe Netz gilt aber auch, wenn man  $\xi_1$  und  $\xi_2$  zu Elektrodencurven macht, so dass die Randcurven  $\eta_1 \eta_2$  Stromlinien werden. Zugleich vertauschen alle Linien des Netzes ihren Sinn. Die rechteckigen Felder des Strömungsnetzes sind nämlich alle untereinander ähnlich und haben daher alle den gleichen Widerstand für Elektricitätsbewegung, welche über entsprechende Seiten ein- und austritt. Er ist  $\frac{d\xi}{d\xi k \delta}$  resp.  $\frac{d\eta}{d\xi k \delta}$ , je nachdem die Elektricität längs  $\xi$  oder  $\eta$  fließt. Denkt man sich das Feld nun in Streifen längs der  $\eta$  aufgeschnitten, und auf  $\xi_1$  und  $\xi_2$  constante Potentiale hergestellt, so ersieht man wie oben, dass das Potential mit jedem  $d\xi$  um einen constanten Werth wachsen muss, dass also die vorherigen Stromlinien zu isoelektrischen geworden sind über das System der getrennten Streifen, welche so nach ohne Störung wieder vereinigt werden können. Da auch die Widerstände der ganzen Streifen übereinstimmen, so fließt in jedem gleich viel Elektricität, kurz das Liniensystem ist ein Strömungsnetz für die (gekreuzte) Elektricitätsbewegung im 2<sup>ten</sup> Falle.

Dieser Umstand liefse sich gelegentlich experimentell verwerthen. Hätte man z. B. nach Kirchhoff's Methode die isoelektrischen Linien einer gegebenen Strömung zwischen zwei Elektrodenpunkten mit dem Galvanometer bestimmt, so würde es genügen, längs zweier dieser isoelektrischen Linien Ausschnitte herzustellen, welche bis zum Flächenrande verlaufen, um ein Feld von der gewünschten Beschaffenheit zu erhalten. Lässt man die Elektricität über die Randtheile eintreten, welche vorher Stromlinien

waren, so erhält man durch die galvanometrische Ermittlung der Linien gleichen Potentials mit Genauigkeit die Stromcurven der vorhergegangenen Elektricitätsbewegung.

Diese Umkehrung des Strömungsnetzes dürfte sich bei ebenen, aus dünnen Flüssigkeitsschichten hergestellten Platten am bequemsten ausführen lassen. Unpolarisirbare Metallstreifen, welche mit der Kette verbunden in die Flüssigkeit eintauchen, hätten dabei die Rolle der Elektrodencurven zu spielen. Nach dem Ergebniss der Dömalip'schen Widerstandsmessungen ist kaum zu zweifeln, daß es möglich sey, Abbildungsprobleme für begränzte ebene Platten auf galvanometrischem Wege zu behandeln<sup>1)</sup>.

Graz, im Juli 1876.

---

### III. *Ueber normales Magnetisiren;* *von Th. Petruscheffsky.*

---

#### §. 1. Einleitung.

In einer früheren Abhandlung<sup>2)</sup> habe ich mehrere Methoden zur Bestimmung der Lage der Pole eines Magneten, d. h. der Angriffspunkte der magnetischen Resultirenden, beschrieben. Gewöhnlich findet man diese Lage durch Rechnung aus der Vertheilung des freien Magnetismus; dieses ist aber eine langwierige Arbeit und man unterzieht sich derselben nur ungern; eine directe Bestimmung verdient daher den Vorzug, wenigstens in den Fällen, wo es sich

1) Nachdem die obige Abhandlung bereits für die Annalen eingesandt war, habe ich in meinem Laboratorium zu Dresden die letzthbesprochene Umkehrung des Strömungsnetzes mit Flüssigkeitsplatten ausführen lassen. Das Resultat entsprach in großer Vollkommenheit den gehegten Erwartungen.

2) Diese Ann. Bd. 152, S. 42.

um die Lage der Pole handelt und nicht um das Gesetz der Vertheilung; zudem giebt aber auch die Lage der Pole einen angenäherten Begriff über die Vertheilung des Magnetismus.

Mit dieser Frage in enger Beziehung steht die andere über die in einem Magneten entwickelte Intensität des Magnetismus. In dieser Beziehung sind die positivsten Resultate von Lenz und Jacobi für Elektromagnete gefunden worden, und obgleich die von diesen Forschern aufgestellten Gesetze in späterer Zeit von anderen mehrfach angefochten oder in enge Gränzen verwiesen worden sind, so haben sie, trotz 15jähriger Polemik, doch ihre Bedeutung nicht eingebüßt.

Im Allgemeinen wird angenommen, daß die Gesetze der scheinbaren und wirklichen Vertheilung des Magnetismus in einem regelmässig magnetisirten Stabe bekannt sind, und die früheren Physiker glaubten eine regelmässige Vertheilung des Magnetismus durch den Doppelstrich zu erreichen, wobei die Streichmagnete in der Mitte getrennt und nach den Enden des zu magnetisirenden Stabes geführt werden. Hierbei wird offenbar vorausgesetzt, daß der Magnetismus in beiden Hälften des Magneten symmetrisch vertheilt sey, und da zugleich die Form der Curve bekannt ist, welche das Gesetz der magnetischen Vertheilung ausdrückt, so scheint es, daß der Begriff des regelmässigen Magnetisirens ganz klar und scharf hingestellt ist. Nun kann sich aber die Gestalt der Curve des freien Magnetismus innerhalb gewisser Gränzen recht wesentlich ändern, und die Bestimmung ihrer Ordinaten erfordert nach den Methoden von Coulomb, Lenz und Lamont eine recht langwierige Arbeit; außerdem sind diese Methoden nicht scharf genug, um geringe Variationen in der magnetischen Vertheilung nachzuweisen. Als Kupffer bei seinen Bestimmungen über die Vertheilung des Magnetismus in einem Stahlcylinder gefunden, daß der neutrale Punkt durch die Wirkung des Erdmagnetismus sich um 20 Mm. verschoben hatte, wurde dieses Resultat an-

gezweifelt<sup>1)</sup>), und dieser Zweifel ist der mangelhaften Beobachtungsmethode (Schwingungen einer Nadel), zu zuschreiben. Außerdem kommt es nicht selten vor, daß die Verteilung des Magnetismus sich sehr rasch ändert; dann sind die erwähnten Untersuchungsmethoden gar nicht mehr anwendbar. In diesem Falle ist man gezwungen die directe oder unmittelbare Bestimmung der Pole zu wählen, oder aber man kann, wenn die, nur durch eine Veränderung in der Verteilung erfolgte Verschiebung der Pole, bestimmt werden soll, die unten beschriebene Methode der Ablenkung einer gehörig angebrachten empfindlichen Nadel anwenden.

### §. 2. Theorie der Meridiannadel.

*N* und *S* seyen die Pole eines horizontalen, zum Meridian senkrecht gestellten, Magneten *MM'* (Fig. 1, Taf. VI), *ns* eine um den Pol *s* drehbare Magnetnadel. Es kann offenbar dem Magneten immer eine solche Lage gegeben werden, daß seine Wirkung auf die Nadel *ns* in der Richtung des Meridians erfolgt, so daß dieselbe aus ihrer ursprünglichen Lage nicht abgelenkt wird. Seyen  $\alpha$  und  $\beta$  die Winkel, welche die Linien *Sn* und *Nn* mit der Nadel *ns* bilden, *f* die magnetische Intensität der Pole der Nadel, *F* des zu untersuchenden Magneten *MM'*, so wird die Nadel aus dem Meridiane nicht abgelenkt werden, sobald die Projectionen der auf einen Punkt *n* wirkenden, anziehenden und abstossenden Kräfte auf eine horizontale Linie einander gleich werden; daraus folgt die Bedingungsgleichung

$$\frac{Ff \sin \alpha}{S_n^2} = \frac{Ff \sin \beta}{N_n^2} \quad \text{oder} \quad \frac{\sin \alpha}{S_n^2} = \frac{\sin \beta}{N_n^2} \quad \dots \quad (1).$$

Da in diesem Ausdrucke weder *f* noch *F* vorkommen, so bleibt die Nadel bei einer Änderung in der Intensität der Pole, die ja für beide Pole immer gleich seyn wird, stets in der Richtung des Meridians.

1) Feilitzsch, Encyclopädie d. Physik. Galvanische Fernewirkungen §. 6.

Setzt man in den Ausdruck (1) statt  $\sin\alpha$  und  $\sin\beta$  die Werthe  $\frac{PS}{S_n}$  und  $\frac{PN}{N_n}$ , so hat man

$$\frac{PS}{S_n^3} = \frac{PN}{N_n^3}.$$

Bezeichnet man ferner den Abstand des Poles von der Mitte des Magneten  $O$  mit  $x$ , die Entfernung  $P$  von  $O$  mit  $a$  und die des Punktes  $P$  von  $n$  mit  $q$ , so ist  $PS=a-x$ ,  $PN=a+x$ ;

$S_n = \sqrt{q^2 + (a-x)^2}$  und  $N_n = \sqrt{q^2 + (a+x)^2}$ ;  
durch Einsetzen dieser Werthe verändert sich die Gleichung (1) in:

$$\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^3 = \left(\frac{q^2 + (a-x)^2}{q^2 + (a+x)^2}\right)^3 \quad \dots \quad (2),$$

aus der man durch gehörige Umformung die Gleichung:

$2(a^2 - x^2)(a^4 - x^4) + 3q^2(a^2 - x^2)^2 - q^6 = 0 \quad (3)$   
erhält, die nach den Potenzen von  $x$  geordnet, die Gestalt:

$$x^6 + \left(\frac{3q^2}{2} - a^2\right)x^4 - a^2(3q^2 + a^2)x^2 + a^6 + 3a^4q^2 - \frac{q^6}{2} = 0$$

nimmt. Um das Vorzeichen des constanten Gliedes deutlicher zur Anschauung zu bringen, kann man es in Form zweier Factoren schreiben:

$$x^6 + \left(\frac{3q^2}{2} - a^2\right)x^4 - a^2(3q^2 + a^2)x^2 + \left(a^2 - \frac{q^2}{2}\right)(a^2 + q^2)^2 = 0 \quad (4).$$

In Bezug auf dieses constante Glied kann man drei Annahmen machen; es kann nämlich negativ, positiv oder Null seyn, d. h.

$$1) \ a^2 < \frac{q^2}{2}, \quad 2) \ a^2 > \frac{q^2}{2} \text{ und } 3) \ a^2 = \frac{q^2}{2}.$$

Setzt man  $y$  statt  $x^2$ , so wird die letzte Gleichung:

$$2(a^2 - y)(a^4 - y^2) + 3q^2(q^2 - y)^2 - q^6 = 0 \quad (5)$$

$$y^6 + \left(\frac{3q^2}{2} - a^2\right)y^4 - a^2(3q^2 + a^2)y^2 + \left(a^2 - \frac{q^2}{2}\right)(a^2 + q^2)^2 = 0 \quad (6).$$

1. Setzt man, bei der Annahme, daß  $a^2 < \frac{q^2}{2}$ , in die Gleichung (5) die Werthe:

$$-\infty \quad a^2 - \frac{q^2}{2} \quad o \quad a^2 \quad +\infty$$

so erhält man die Zeichen

$$- \quad + \quad - \quad - \quad +$$

Nimmt man die Lage der Pole an, wie sie in Fig. 1, Taf. VI gegeben ist, so kann man nur positive Werthe von  $y$  zulassen, da nur solche einem stabilen Gleichgewicht der Nadel entsprechen. Denn liegt der Südpol  $S$  rechts von  $O$ , so wird die Resultirende der Attraction und Repulsion von  $n$  nach  $s$  gerichtet seyn, was einem labilen Gleichgewichte entspricht. Die Reihe der Vorzeichen zeigt, daß zwischen  $a^2$  und  $+\infty$  ein Werth besteht, der nicht zulässig ist, da ja  $x < a$  seyn muß.

2. Ist  $a^2 > \frac{q^2}{2}$ , so erhält man für

$$-\infty \quad o \quad a^2 - \frac{q^2}{2} \quad a^2 \quad +\infty$$

die Vorzeichen:

$$- \quad + \quad + \quad - \quad +$$

und man hat demnach zwei Wurzeln der Gleichung, von denen jedoch nur eine  $y > a^2 - \frac{q^2}{2}$  zulässig ist.

3. Ist schließlich  $a^2 = \frac{q^2}{2}$ , so verwandelt sich Gleichung (6) in

$$y^2 + q^2 y - \frac{7}{4} q^4 = 0,$$

welche nur eine positive Wurzel:

$$q^2 \left( \sqrt{2} - \frac{1}{2} \right)$$

hat. Die gesuchte Entfernung des Poles  $x = \sqrt{y}$  hat bei jeder Annahme einen positiven Werth, es kann also bei unverändertem  $a$  und  $q$  nur ein System von Polen bestehen, und daher muß bei einer symmetrischen Verschiebung der Pole die Nadel aus dem Meridiane abgelenkt werden.

Auf dieser Eigenschaft beruht meine Methode durch die Nadel eine Veränderung in der Vertheilung des Magnetismus zu bestimmen. Zum Unterschiede von Nadeln, die zu anderen Zwecken dienen, werde ich diese die „*Meridian-Nadel*“ nennen.

Wenn in der Gleichung (1) der erste Theil der Gleichung gröfser wird als der zweite, d. h. wenn die Projection der Anziehung gröfser wird als die Projection der Abstofzung, so wird sich die Nadel in der Richtung zur Mitte des Magneten drehen, im entgegengesetzten Falle wird sie vom Magneten weiter abweichen. Diese zwei Bedingungen führen zur Ungleichheit:

$$2(a^3 - x^3)(a^4 - x^4) + 3q^2(a^2 - x^2) - q^2 \left\{ \begin{array}{l} > 0 \\ < 0 \end{array} \right.$$

Die erste Ungleichheit gilt für den Fall, daß  $x$  kleiner als die Wurzel der Gleichung (3), die zweite in dem Falle, wenn  $x$  gröfser ist. Folglich zeigt eine *Abweichung der Nadel zum Magnet hin eine Verringerung der Interpolär-Entfernung*, oder eine gröfsere Entfernung der Pole vom Endpunkte des Magneten; hingegen weist eine *Abweichung der Nadel von dem Magnetem fort*, auf eine Annäherung der Pole zu den Endpunkten oder eine *Vergrößerung in den Abständen der Pole* von einander. In Zukunft werde ich die erste Verschiebung negativ (-), die zweite (+) bezeichnen.

### §. 3. Beschreibung der Meridian-Nadel.

Die von mir benutzte Magnetnadel besteht aus einem Stahlstabe *nmps* (Fig. 2, Taf. VI), dessen beide Enden bis auf etwas mehr als  $\frac{1}{3}$  der vollen Länge nach unten gebogen sind. Auf diesem Stabe liegt ein zweiter aus einem nicht magnetischen Metalle, auf dessen beiden Enden zwei Ringe *N* und *S* mit Fadenkreuzen liegen.

Die volle Länge der Nadel *nmps* beträgt 66 Mm., jedes der zurückgebogenen Enden *nm* = *ps* = 12 Mm., die Entfernung der Fadenkreuze *NS* von einander = 106 Mm.

In der Mitte des Stabes befindet sich ein Haken *K*, an den ein Faden roher, ungedrehter Seide befestigt ist. Ein kleines Laufgewicht *R*, welches an einer Schraube dem Stabe parallel verschoben wird, dient zur Horizontalstellung der Nadel. Die Nadel ist so schwer, daß durch die Anziehung eines Magneten oder Elektromagneten der Faden nicht merklich von der Verticalen abgelenkt wird. In Fig. 3, Taf. VI ist die Nadel von oben abgebildet. An dem Ende *s* der Nadel hängt an einem Silberdraht die silberne Platte *P*, die in ein Oelgefäß taucht und die Schwingungen der Nadel auf diese Weise vermindert. Auf Grund der Coulomb'schen Untersuchungen kann man annehmen, daß die Pole von den Enden um  $\frac{1}{6}$  der Nadel-länge abstehen, sich demnach innerhalb der Endstücke *nm* und *ps* befinden, daher ist *mp* der Arm, auf den die äusseren magnetischen Kräfte wirken.

Die Nadel ruht in einem Messinggehäuse (Figur 4, Tafel VI) mit Deckglas, durch welches mittelst eines 6 bis 8 mal vergrößernden Mikroskops die Fadenkreuze und zwei unter ihnen liegende Gradbogen beobachtet werden. Beim Anfange eines jeden Versuches wird die Nulllinie in den Meridian gebracht, die geringe Breite des Gehäuses gestattet der Nadel alsdann nur eine Ablenkung von einigen Graden. Um die Nadel, nachdem sie anfänglich auf  $0^\circ$  eingestellt worden, genau auf denselben Punkt zurückzuführen, wird das Fadenkreuz an einem Ende mit dem Mikroskope anvisirt; es kann dann bequem  $0^\circ,05$  Ablenkung beobachtet werden; eine grössere Genauigkeit zu erzielen, habe ich für überflüssig gehalten.

An einer Seite des Gehäuses befindet sich ein Leisten mit zwei Dioptern *N* und *S*, von denen das eine ein Fadenkreuz, das andere eine Reihe Visirlöcher, senkrecht übereinander, trägt. Die Visirlinie dieses Diopters muß der Nulllinie der Gradbogen parallel liegen und muß dieser Parallelismus geprüft werden.

§. 4. Regelmäfsige Vertheilung des Magnetismus.

Coulomb und Biot haben nachgewiesen, daß die magnetische Vertheilung im Stahlmagneten, deren Länge den Durchmesser vielfach übertrifft, eine regelmäfsige ist und dass sie für Stäbe verschiedener Länge, wenn sie nicht kürzer als 20<sup>cm</sup>, ein und dieselbe ist. Seitdem hält man eine solche Vertheilung, wenn sie durch Doppelstrich hervorgerufen wird, für normal. Es wird nicht ohne Interesse seyn in folgender Tabelle den Grad der Uebereinstimmung zu prüfen, zwischen den von Coulomb beobachteten Größen und den aus der bekannten Biot'schen Formel  $y = A(\mu^* - \mu^{2l-s})$  hergeleiteten, in welcher  $A$  und  $\mu$  zwei für ein und denselben Magneten Constante bedeuten,  $y$  die magnetische Intensität eines vom Endpunkte des Magneten um  $x$  abstehenden Punktes,  $2l$  die Länge des Magneten. Folgende Tabelle gilt für einen Magneten von 27 Zoll Länge und 2 Linien Durchmesser:

$x$ in Zollen	$y$ berechnet	$y'$ beobachtet	$y - y'$
0	173,76	165	+ 8,76
1	90	90	0,00
2	46,62	48	- 1,38
3	24,14	23	+ 1,14
4,5	9,00	9	0,00
6	3,35	6	- 2,65.

Wenn man den geringen Grad von Genauigkeit berücksichtigt, welcher der Coulomb'schen Methode zugeschrieben werden muß, so wird man die Uebereinstimmung für eine genügende erklären können, man wird sich aber auch sagen müssen, daß kleine Änderungen in der Vertheilung nach dieser Methode unbemerkt bleiben werden.

Folgende Zahlen entnehmen wir einer Untersuchungsreihe Lamont's<sup>1)</sup>; der Magnet war der Länge nach in 12 gleiche Theile getheilt und es wurde die Intensität des Magnetismus an jedem der 12 Punkte durch Gewichte

1) Encyclopädie der Physik. Magnetismus von Lamont.

gemessen, welche erforderlich waren um einen kleinen eisernen Cylinder abzureißen. Die Entferungen sind in Theilen der ganzen Länge des Magneten gemessen und wurden von der Mitte gezählt:

Entfernung	$y'$ beobachtet	$y' - y$
+ 6	+ 24,1	+ 2,5
+ 5	+ 13,5	- 0,8
+ 4	+ 8,7	- 0,6
+ 3	+ 5,3	- 0,5
+ 2	+ 3,8	+ 0,3
+ 1	+ 2,2	+ 0,6
0	+ 0,7	+ 0,7
- 1	- 2,0	- 0,4
- 2	+ 4,0	- 0,5
- 3	+ 6,0	- 0,2
- 4	+ 9,1	+ 0,2
- 5	- 13,8	+ 0,5
- 6	- 21,8	- 3,2

Von diesen Zahlen lässt sich dasselbe sagen, wie auch von den vorhergehenden; man sieht aber zugleich aus der Vertheilung der Vorzeichen, dass die Vertheilung des Magnetismus nicht genügend symmetrisch ist. So übertrifft z. B. an dem Punkt + 5 der beobachtete Werth von  $y$  um das 0,06fache den berechneten, auf dem Punkte - 5 ist er aber um das 0,036fache geringer.

Durch den Doppelstrich wird die symmetrische Vertheilung nur schwer erlangt, wenn man nicht besondere Hülfsmittel anwendet, die es ermöglichen das Anlegen und Abheben beider Magnete genau gleichzeitig auszuführen.

Einige Versuche, die ich in meiner ersten Abhandlung angeführt habe, und die in unmittelbarer Bestimmung der Pole bestanden, bestätigen diese Bemerkung vollständig. Man sieht aus diesen Versuchen, dass man bei Anwendung des Doppelstrichs nicht immer auf dieselbe Vertheilung des Magnetismus rechnen kann und dass dieselbe

häufig auch nicht genug symmetrisch ist. Es kann daher ein auf gewöhnlichem Wege erhaltener Magnet nicht als ein *normaler* betrachtet werden.

Ueberhaupt finden wir bisher keine strenge Definition des Begriffes einer normalen Vertheilung des Magnetismus. Am bestimmtesten finde ich diesen Begriff aufgefaßt bei Lamont (Magnetismus, S. 188, 190 und 191); er nimmt an, daß zum Zwecke normaler Vertheilung eine elektromagnetische Spirale von unendlicher Länge angewandt werden muß, d. h. in der Praxis von solcher Länge, daß eine Vergrößerung derselben auf die Vertheilung ohne merkbaren Einfluß bleibt. In solchem Falle, meint Lamont, werden alle Theilchen des Eisens einer gleichen magnetisirenden Wirkung der Spirale ausgesetzt seyn.

#### §. 5. Einfluß von Erschütterungen auf die Vertheilung des Magnetismus.

Bevor ich die Bedingungen für eine normale Magnetisirung feststelle, will ich einige Bemerkungen und Versuche über die Veränderungen vorausschicken, welche aus verschiedenen Gründen in der Vertheilung des Magnetismus erfolgen.

Es ist schon lange bekannt, daß Stöfse, Schläge oder andere heftige Erschütterungen der Entwicklung des Magnetismus im Eisen sowohl, wie im Stahle, zuweilen förderlich sind. Eine der ältesten Magnetisierungsmethoden bestand darin, daß ein Stahlstab in der Richtung der magnetischen Inclination oder auch nur im Meridian gehalten und mit einem Hammer geschlagen wurde. Daher werden viele stählerne Instrumente, Feilen, Meisseln usw., bei anhaltendem Gebrauche magnetisch.

Beim Magnetisiren des Stahls durch Streichen ist es förderlich die Reibung zu vergrößern. Wenn die Oberfläche des zu magnetisirenden Stückes sorgfältig polirt und mit Oel geschmiert ist, so wird es schwerer magnetisch, als bei rauher Oberfläche; wird das Stück während des

Streichens geschlagen, so wird es kräftiger magnetisirt, als bei ruhiger Lage.

Schläge und Erschütterungen können auf einen Magneten zweifach wirken:

1. Wenn der Körper dem Einflusse äußerer magnetischer Kräfte unterworfen ist, wird die Entwicklung des Magnetismus gefördert.

2. Ist hingegen der Körper schon magnetisirt und unterliegt er nur dem Einflusse innerer magnetischer Kräfte, dann schwächen Erschütterungen seinen Magnetismus.

Man hat hieraus gefolgert, dass dem magnetischen Zustande eines Körpers eine gewisse Gruppierung der Theilchen des Körpers entspricht und dass diese Theilchen, wenn sie in Bewegung sind, unter dem Einflusse äußerer magnetischer Kräfte leichter die für den Magnetismus erforderliche Lage annehmen.

Bei Marianini<sup>1)</sup> finden wir viele hieher gehörige sehr interessante Versuche aufgezählt. Er weist nach, dass ein in gegebenem Sinne magnetisiertes Metall, nach Aufhebung des Magnetismus, oder gar Umkehrung desselben, stets geneigt bleibt die Vertheilung im ursprünglichen Sinne anzunehmen. Es genügen dazu in der Regel eine oder einige Erschütterungen durch das Aufschlagen desselben beim Falle auf einen steinernen Fußboden von 10 bis 15 Fuss Fallhöhe.

Vor Marianini schon hat Moll die Bemerkung gemacht, dass in einem Elektromagneten der Magnetismus, obgleich er nach Umkehrung der Stromrichtung sogleich entgegengesetzt wird, doch der nun erlangte Magnetismus immer schwächer sich erweist, als der ursprüngliche, besonders wenn letzterer längere Zeit gewährt hatte. Häufige Umkehrung in der Stromrichtung hebt die Fähigkeit des Eisens vorwiegend in einem Sinne magnetisch zu werden auf.

Intermittirende galvanische Ströme einer Spirale verursachen im Eisen oder Stahlkerne Erschütterungen, in Folge

1) *Annales de Chimie et de physique* 3. série, t. XIII et XIV.

derer der Kern tönt, wenn die Unterbrechungen häufig genug erfolgen. Eine Unterbrechung des Stroms kann demnach als Mittel zur Erzeugung von Erschütterungen in einer magnetischen Masse betrachtet werden.

Der durch einen galvanischen Strom im Strom erzeugte Magnetismus verschwindet bekanntlich nicht vollständig, sobald der Strom unterbrochen wird und der remanente Magnetismus zeigt, obgleich er nur schwach ist, deutlich polare Eigenschaften und übt auf die Magnetnadel eine merkliche Wirkung aus. Außerdem habe ich bemerkt, daß wiederholtes Magnetisiren von Eisen, vorwiegend in einer Richtung, die Eigenschaften desselben derart verändert, daß es sich dem Stahle nähert. Ein großer Theil der von mir benutzten Eisencylinder hat mit der Zeit auf diesem Wege einen nicht unbeträchtlichen permanenten Magnetismus angenommen. So kann z. B. gegenwärtig ein Cylinder von 300<sup>mm</sup> Länge an seinem Ende 15 Grm. halten, während er im Anfange eine nur kaum merkliche Anziehung ausübte.

Waltenhofen<sup>1)</sup> hat bemerkt, daß bei allmählicher Abnahme der Stromstärke der remanente Magnetismus größer ist, als bei plötzlichem Unterbrechen, und erklärt diese Erscheinung auf Grund der Theorie sich drehender Elektromagnete. Ich habe seine Versuche wiederholt und bin zu ähnlichen Resultaten gelangt; hiebei schätzte ich die Intensität des erzeugten Magnetismus nach den Ablenkungen einer Magnetnadel, die so aufgestellt war, daß ihre Mitte senkrecht von der verlängerten Axe des Elektromagneten getroffen wurde. Die beobachtete Abnahme des Magnetismus läßt sich übrigens auch aus einer gegenseitigen Annäherung der Pole erklären; vielleicht auch wirken beide Umstände zusammen; eine Näherung der Pole findet aber in der That statt, wenn der Strom plötzlich unterbrochen wird, und es wird dieses bei Aufzählung der Versuchsresultate gezeigt werden.

Alle angeführten Fälle zeigen aufs deutlichste den Ein-

1) Schlämilch's Zeitschrift für Mathematik und Physik 1864.

fluss der Erschütterungen auf die Magnetintensität. Um nun diese Aenderungen nachzuweisen, habe ich die Meridiannadel angewandt, wobei der Untersuchungsmagnet so aufgestellt wurde, wie es in §. 2 beschrieben, stets auf der nordöstlichen oder südwestlichen Seite. Elektromagnete wurden, zur Vermeidung des inducirenden Einflusses des Erdmagnetismus, stets senkrecht zum Meridian gestellt.

Um dem Magneten die nöthigen Erschütterungen mitzutheilen, wurde er in einem besonderen Gestelle in seiner Mitte geklemmt, vor seinem Ende hing ein Hammer aus Kupfer, der wie ein Pendel abgelenkt werden konnte und beim Falle auf das Ende des Magneten aufschlug. Der Hammer war aus Kupfer gefertigt, damit die Vertheilung des Magnetismus nicht durch Berührung mit Eisen verändert werde. Um stets gleiche Schläge zu erzielen, wurde der Hammer immer auf dieselbe Höhe gehoben; er schlug alsdann in der Längsrichtung auf, und ertheilte dem Magneten auf diese Weise Längsschwingungen. Dabei lag der Magnet in der Klemme horizontal und senkrecht zum magnetischen Meridian, wodurch die Aenderungen vom Erdmagnetismus unabhängig gemacht wurden. Kupffer<sup>1)</sup> hat durch einige Versuche gezeigt, daß bei verticaler Lage vom Stahlmagneten der neutrale Punkt beim Schlagen auf den Magneten verschiedene Lagen annehmen kann, je nach dem Ende, mit welchem der Magnet nach Oben gerichtet wird. Die Resultate der Beobachtungen von Kupffer sind insofern nicht ganz zuverlässig, als sie nach der Schwingungsmethode angestellt sind. Aber auch ich habe mich mittelst der Meridiannadel überzeugt, daß die Vertheilung des Magnetismus im Stabe verschieden aussfällt, je nachdem, ob er während der Erschütterungen in der Richtung des Meridians liegt oder senkrecht zu demselben.

Die ersten Untersuchungen über den Einfluß von Erschütterungen habe ich an dem remanenten Magnetismus

1) *Annales de Chimie et de physique.* T. 36.

eiserner Elektromagnete gemacht. Hier war die Abnahme durch Schläge sehr leicht nachzuweisen, besonders in einigen Fällen, wo der remanente Magnetismus nach wenigen Schlägen ganz verschwand; nie verschwand er indessen vollständig, sobald der Elektromagnet in der Richtung des Meridians lag.

Bringt man nach jedem Versuche den Untersuchungsmagneten in seine frühere Lage in Bezug auf die Meridiannadel zurück, so kann man aus seiner Wirkung vor und nach erhaltenen Schlägen auf die Nadel bestimmen, ob in dem Magneten eine Änderung in der Vertheilung des Magnetismus vor sich gegangen; es lässt sich jedoch auf diesem Wege, wie aus §. 2 zu ersehen, kein Schluss auf eine Änderung in der Intensität des Magnetismus machen, falls nur die Lage der Pole unverändert geblieben.

Zu den Versuchen wurden Cylinder aus weichem Eisen angewandt, deren Dimensionen, so wie auch die Länge der magnetisirenden Spirale in der folgenden Tabelle angeführt sind. Immer wurde der Magnet, schon magnetisiert und nach einigen Schlägen, auf ein und dieselbe Weise vor die Meridiannadel gebracht, dann erst begannen die Versuche:

#### Massiver Cylinder.

Länge	Dicke	Länge der Spirale
405 Mm.	16 Mm.	395 Mm.

Der remanente Magnetismus lenkt die Nadel um  $0^{\circ},5$  ab; nach wiederholten Schlägen wird die Ablenkung  $0^{\circ},0$ , jedoch ist ein Theil des Magnetismus noch zurückgeblieben.

#### Eiserner Hohlcylinder.

Länge	Aeuls. Durchm.	Inner. Durchm.
404,4 Mm.	16,4 Mm.	13 Mm.

Der remanente Magnetismus lenkt die Nadel um  $0^{\circ},9$  ab. Nach einigen Schlägen wird sie  $0^{\circ},2$  und nach noch weiteren  $0^{\circ},0$ . Das Eisen wird stahlartig und ist stark magnetisch.

## Massiver Cylinder.

Länge	Dicke	Länge der Spirale
405 Mm.	16 Mm.	303 Mm.

Der remanente Magnetismus lenkt die Nadel um  $0^{\circ},8$  ab, nach ertheilten Schlägen beträgt die Ablenkung  $0^{\circ},0$ .

## Massiver Cylinder.

Länge	Dicke	Länge der Spirale
405 Mm.	16 Mm.	680 Mm.

Der remanente Magnetismus lenkt die Nadel um  $8^{\circ},3$  ab.

Nach 5 Schlägen ist die Ablenkung . . . . .  $4^{\circ}$   
nach weiteren 50 Schlägen . . . . .  $3^{\circ},6$   
nach 200 Schlägen . . . . .  $3^{\circ},1$   
nach fernerer 400 Schlägen ist der Magnetismus fort.

## Massiver Cylinder.

Länge	Dicke	Länge der Spirale
405 Mm.	16 Mm.	Nicht gemessen.

Der vorige Versuch zeigt, dass der Magnetismus bis zu vollständigem Verschwinden aufgehoben werden kann, und es könnte demnach scheinen, dass eine Änderung in der Vertheilung gar nicht braucht angenommen zu werden. Es wurde aber nun der Magnet mit remanentem Magnetismus so gelegt, dass die Meridiannadel im Meridian war. Nach 125 Schlägen wurde der Cylinder wieder in die frühere Lage gebracht, und es erfolgte nun eine starke Ablenkung.

## Massiver Cylinder.

Länge	Dicke	Länge der Spirale
271 Mm.	16 Mm.	Nicht gemessen.

Der remanente Magnetismus ändert sich durch Schläge außerst wenig, d. h. die Änderung in der Lage der Nadel beträgt noch nicht  $0^{\circ},05$ .

## Massiver Cylinder.

Länge	Dicke	Länge der Spirale
271 Mm.	16	Nicht gemessen.

Der Cylinder liegt in der Spirale unsymmetrisch und der remanente Magnetismus ändert sich durch Schläge nicht.

Aus diesen und ähnlichen Versuchen über weiches Eisen lassen sich folgende Schlüsse ziehen: Im magnetisierten Eisen erfolgt durch Schläge sowohl eine Aenderung der Intensität als auch der Vertheilung des Magnetismus. Die ersten Schläge verursachen die stärkste Aenderung, die folgenden schon schwächere und schliefslich werden die Aenderungen in der Vertheilung ganz unmerklich; dieses folgt daraus, dass die Nadel auf  $0^\circ$  zurückkehrt. Ob eine noch weitere Abnahme der Intensität erfolgte, kann ich nicht bestimmen, doch bin ich geneigt es anzunehmen, denn in einem Falle wurde der Magnetismus im Cylinder ganz aufgehoben. Die Vertheilung des Magnetismus erreichte eine gewisse Beständigkeit; in vielen Fällen, wenn ich mit geringen Eisenmassen operirte, trat diese Beständigkeit unmittelbar nach dem Magnetisiren ein.

Ich will nun noch einige Versuche über den Einfluss anführen, welchen die Geschwindigkeit der Unterbrechung auf die Vertheilung des Magnetismus ausübt. Eine plötzliche Unterbrechung wurde durch einen Commutator hervorgebracht, eine langsame hingegen durch allmähliges Ausheben einer Kohlenplatte aus der Flüssigkeit der Batterie; dieses Herausheben muss namentlich gegen Ende des Experiments sehr allmählig erfolgen, wenn die Platte nur noch sehr wenig eintaucht; es ist dann rathsam die Kohlenplatte der porösen Scheidewand entlang zu heben. In andern Fällen wurde eine langsame Stromschwächung durch allmählige Entfernung zweier Kupferelektroden hervorgebracht, welche in ein verticale mit einer Lösung von Kupfervitriol in Wasser gefülltes Gefäß tauchten, das in die Kette eingeschaltet war. Die Versuche ergaben,

dass die Vertheilung des Magnetismus wesentlich *verschieden* ausfällt, je nach der Geschwindigkeit der Stromabnahme. Schliefslich führe ich noch einige Versuche mit Cylindern aus weichem Stahl an:

Länge des Cylinders	Durchmesser	Länge der Spirale
250 Mm.	8 Mm.	405 Mm.

Der remanente Magnetismus richtet die Nadel auf  $0^{\circ},7$ ; die Ablenkungen sind dann: nach dem ersten Schlag  $0^{\circ},35$ , nach zwei weiteren  $0^{\circ},3$ , nach 50 Schlägen  $0^{\circ},1$ . Noch weitere Schläge ändern die Lage der Nadel nicht mehr.

#### Derselbe Cylinder.

Im vorigen Versuch kann die Abnahme der Ablenkung aus zwei Gründen erfolgen, der gegenwärtige beweist entschieden eine Änderung in der Vertheilung des Magnetismus: Derselbe Cylinder wurde, nachdem er magnetisiert worden, so gelegt, dass die Ablenkung  $0^{\circ}$  war, sie stieg jedoch auf  $0^{\circ},4$  durch 50 Schläge und noch fernere 100 lenkten sie auf  $0^{\circ},9$  ab.

Länge des Cylinders	Sein Durchmesser
405	16.

Der Cylinder wurde einige Tage vor dem Experiment Schlägen ausgesetzt, und nicht neu magnetisiert, aber so vor die Nadel gelegt, dass die Ablenkung  $0$  war. Nach 150 Schlägen war keine Änderung in der Ablenkung der Nadel bemerkbar.

#### Derselbe Cylinder.

Magnetisiert in einer unsymmetrisch umhüllenden Spirale. Die ersten 50 Schläge ändern den remanenten Magnetismus sehr bedeutend. Die folgenden 100 Schläge bringen keine messbare Wirkung hervor.

Aus diesen und ähnlichen Versuchen kann man dieselben Schlüsse ziehen wie für weiches Eisen.

Beim  
nachher  
Verände  
gefunde  
tung a  
zu habe  
welche  
aus fol  
verursa

Ich  
gehärtet  
der sic  
befand  
wurde  
versch  
einstell

Ei  
wenig  
Ablen  
eine L  
Spiral  
ihre L  
stiege  
magne  
der M  
wurd  
tisiru  
Temp  
Einf

linde  
schied  
wurd  
kühl  
1)

§. 6. Ueber den Einfluss der Temperatur und Stromstärke  
auf die magnetische Vertheilung.

Beim Erwärmen eines Stahlcylinders auf  $100^{\circ}$  und nachheriger Abkühlung desselben hatte Kupffer<sup>1)</sup> eine Veränderung in der magnetischen Vertheilung desselben gefunden. Ich habe auch einige Versuche in dieser Richtung angestellt, vorwiegend freilich um die Möglichkeit zu haben meine Beobachtungen von Fehlern zu korrigiren, welche durch eine starke Erhitzung der Spirale und daraus folgende Erwärmung des Kerns meiner Elektromagnete verursacht wurden.

Ich benutzte zu diesem Zwecke einen Magnet aus ungehärtetem Stahle von  $254^{\text{mm}}$  Länge und  $8,9^{\text{mm}}$  Durchmesser, der sich in einem durch Spiritus erwärmten Wasserbade befand. Der Magnet lag auf besonderen Stützen und wurde von Außen durch eine Mikrometerschraube so lange verschoben, bis die Meridiannadel sich in den Meridian einstellte.

Eine Erwärmung auf  $100^{\circ}$  verursachte eine Ablenkung weniger als um  $0^{\circ},1$ ; für niedrigere Temperaturen war die Ablenkung noch schwächer, so daß bei meinen Versuchen eine Erwärmung des Eisenkerns durch die Erhitzung des Spiraldrähtes jedenfalls ohne merklichen Einfluß war und ihre Fehler die Größe der Beobachtungsfehler nicht überstiegen. Der untersuchte Magnet war durch Doppelstrich magnetisiert worden, wobei jedoch der Strich nicht von der Mitte, sondern von einem Drittel der Länge begonnen wurde. Es wurde absichtlich eine unregelmäßige Magnetisirung hervorgebracht, da sich erwarten ließ, daß die Temperatur auf einen unregelmäßigen Magneten stärkeren Einfluß ausüben würde, als auf einen regelmäßigen.

Bei einem anderen Versuche wurde ein stählerner Cylinder von  $405^{\text{mm}}$  Länge in verschiedenen Punkten verschieden erwärmt, doch nirgends über  $100^{\circ}$ ; die Nadel wurde hierbei auf  $0^{\circ},2$  abgelenkt und kehrte nach dem Abkühlen nicht weiter zurück.

1) *Annales de chimie et de physique.* T. XXX.

Da ich es mir nicht zur Aufgabe gemacht hatte die Gesetzmässigkeit aufzufinden, mit welcher die Temperatur auf die Vertheilung des Magnetismus wirkt, so habe ich mich mit diesen Beobachtungen begnügt, da sie mir den Beweis gaben, dass bei nicht zu starker Erwärmung eine veränderte magnetische Vertheilung nicht zu erwarten stand. Starke Erwärmungen habe ich aber stets vermieden.

Einigermaßen muss die magnetische Vertheilung auch von der Strom-Intensität abhängig seyn; es folgt das aus der Verschiedenheit des remanenten Magnetismus (bei der Stromstärke 0) von dem Magnetismus bei bestehendem Strome; bei schwachen Strömen ist der Magnetismus wohl ein mittlerer zwischen diesen Extremen.

Der Versuch hat mir indessen gezeigt, dass bei einem Strome von einem Bunsen'schen Elemente, der durch alle im nächsten Paragraphen angeführte Instrumente ströme, in eisernen Cylindern unbedeutender Dicke eine eben solche magnetische Vertheilung hervorrief, wie auch stärkere Ströme (im Verhältnis von 3 : 1). Für dicke Stäbe (über 12<sup>mm</sup> hinaus) ist aber diese Stromstärke ungenügend und man muss eine Batterie von 3 und mehr solcher Elemente anwenden, dann erst kann man sicher seyn, dass eine Änderung in der Stromstärke ohne Einfluss auf die Vertheilung ist. Ich habe bei allen späteren Versuchen nie weniger als 4 Elemente angewandt, zuweilen wuchs ihre Zahl sogar auf 8 und 12.

Für das Magnetisiren stählerner, namentlich dicker, Cylinder erwies sich auch diese Stromstärke ungenügend. Ich habe übrigens fast nur eiserne Cylinder benutzt, weil stählerne überhaupt bedeutende Schwankungen und Unregelmässigkeiten zeigten, die ich mir nicht erklären konnte.

#### §. 7. Beschreibung des Apparates zum Magnetisiren von Eisen und Stahl.

Schon vor längerer Zeit habe ich bemerkt, dass die magnetische Vertheilung in einem Elektromagneten wesent-

lich von der Länge der magnetisirenden Spirale abhängt. Sie ist eine andere unter dem Einflusse des Stroms und wieder anders, wenn der Strom unterbrochen wird; dabei scheint es eine bestimmte Länge der Spirale zu geben, bei welcher die Vertheilung besonders bemerkenswerth ist. Nach einigen Versuchen, welche den für diese Beobachtungen nothwendigen Grad der Genauigkeit constatiren sollten, construirte ich schlieflich einen Apparat, welcher gestattete die Länge der magnetisirenden Spirale innerhalb gewisser Gränzen willkührlich zu verändern.

Dieser Apparat ist Fig. 5, Taf. VI im Aufriss dargestellt, Fig. 6 zeigt die Meridiannadel, deren Lage bei der Beobachtung so ist, dass *NS* in Fig. 6 in die Verlängerung von *NS* Fig. 5 fällt.

Auf einem Holzbrett mit 3 Stellschrauben *A*, *A'* und *A''* stehen vier Stützen *D*, *E*, *F* und *G*, in welchen sich die Messingröhren *TE* und *OF* frei bewegen; zwei dieser Stützen *E* und *F* haben runde Ausschnitte, die beiden anderen *D* und *G* Muttern, in welchen zwei Schrauben gehen. Das Rohr *TE* ist in *T* geschlossen, während es von der Seite *L* offen ist, ebenso ist das Rohr *OF* in *O* geschlossen und bei *V* offen; im Boden einer jeden Röhre ist eine Vertiefung, in welche die entsprechende Schraube tritt, in der Nähe des anderen Endes der Röhre ist auf dieselbe ein Ring gesetzt, der dem Rohre nicht erlaubt über eine gewisse Gränze hinaus in die Oeffnung einzudringen. An die hervorspringenden Theile *L* und *V* sind auf der Zeichnung fortgelassene Griffe befestigt, mit deren Hülfe die Röhren gedreht werden. Auf *TE* ist ein Draht gewickelt, der auch auf das andere Rohr hintübergeht; das eine Ende des Drahtes ist mit dem Ringe *E*, das andere mit *F* verbunden. An jeden dieser Ringe drückt eine Feder an, welche ihrerseits mit den Klemmschrauben *H* und *H'* verbunden ist, so dass bei Verbindung dieser Klemmschrauben mit den Polen der Batterie der Strom durch den ganzen Draht geleitet und beim Abwickeln des Drahtes nicht unterbrochen wird. Auf diese Weise kann die Länge der

elektromagnetischen Spirale auf dem Rohre *FO* von 0 bis 380<sup>mm</sup>, auf *TO* von 310 bis 680<sup>mm</sup> verlängert werden. Solcher Röhren wurden zwei Paare benutzt, von denen das breitere 14,5, das schmälere 11,7<sup>mm</sup> Durchmesser hatte. Außerdem wurde noch ein Rohr von 38<sup>mm</sup> Durchmesser benutzt.

Den Röhren parallel und zwischen ihnen befand sich ein Messinglineal mit einer Laufplatte *P*, auf welcher der Rahmen *RW* mit zwei verticalen Haardioptern befestigt ist, die auf der Zeichnung fortgelassen sind. Das Lineal mit den Dioptern hat eine doppelte Bewegung, eine grobe und eine feine, die durch eine Schraube erreicht wird. Die Visirlinie der Diopter steht möglichst genau senkrecht zu den Axen der Röhren und wird diese Lage auf verschiedene Weise geprüft.

Dieser Apparat steht während der Beobachtung nördlich von der Meridiannadel und wird mit Hülfe der Diopter senkrecht zum Meridian gerichtet.

Wenn *BC* (Fig. 6) die Meridiannadel im Aufriss darstellt, die so gerichtet ist, daß ihre Visirlinie mit dem magnetischen Meridian zusammenfällt, so müssen zur Einstellung des Apparats mit den Spiralen dieser Apparat und sein Lineal mit den Dioptern so lange verschoben werden, bis alle Visirlinien in der Richtung des Meridians *NS* liegen. Das Auge des Beobachters befindet sich hierbei in *C*, wo das Diopter mit den in verticaler Linie liegenden Löchern sich befindet; das Diopter *B* hat zwei ein schräges Kreuz bildende Haare, in *W* ist ein senkreiches Haar und das Diopter *R* endlich trägt wieder ein Kreuz. Bei richtiger Einstellung der Diopter sieht der Beobachter die Fäden des Diopters, wie sie in Fig. 7, Taf. VI dargestellt sind. Hierbei wird die Meridiannadel durch Schrauben auf die Höhe der Röhrenaxen gestellt.

(Schluß im nächsten Heft.)

IV.

Wir erwärmen und ich einfach bracht der O stillach welche Drahten die Ur chen d ich su galvanis annahm der L seyen

Es die Te periph sache war, s Anhan in wel vollkom

Ich im In Drahte Länge Draht könne

**IV. Ueber die Temperatur im Leitungsdrähte  
eines galvanischen Stromes;  
von Heinrich Streintz.**

---

Wird ein Draht durch einen hindurchgeleiteten Strom erwärmt, so dehnt er sich aus und zwar, wie Edlund und ich nachgewiesen haben, mehr, als wenn er durch einfache Erwärmung gleichmäßig auf jene Temperatur gebracht wird, welche er bei galvanischer Erwärmung an der Oberfläche zeigt. Edlund und ich nahmen dabei stillschweigend an, dass diejenigen Temperaturdifferenzen, welche die centralen Theile des galvanisch erwärmten Drahtes gegenüber den peripherischen zeigen müssen, nicht die Ursache der erhaltenen Unterschiede seyen, und sprachen daher von einer eigenen galvanischen Ausdehnung; ich suchte auch deshalb und aus anderen Gründen die galvanische Verlängerung dadurch zu erklären, dass ich annahm, die Wärmeschwingungen finden hauptsächlich in der Längsrichtung des Drahtes statt, kurz gesagt, sie seyen polarisiert.

Es muss aber zugestanden werden, dass die Annahme, die Temperaturunterschiede zwischen den centralen und peripherischen Theilen des Drahtes seyen *nicht* die Ursache der galvanischen Verlängerung, eine willkürliche war, so dass die Bemerkung Wiedemann's in No. 66 des Anhanges seines Werkes über den Galvanismus (II. Aufl.), in welcher er die Erlaubtheit dieser Annahmen bezweifelt, vollkommen berechtigt war.

Ich war deshalb bestrebt, die Temperaturvertheilung im Innern eines vom galvanischen Strome durchflossenen Drahtes kennen zu lernen, um den Unterschied in der Länge des gleichmäßig und des galvanisch erwärmten Drahtes bei gleicher Oberflächentemperatur nehmen zu können.

Ich hatte die analytischen Entwickelungen bereits einige Zeit fertig, als ich erst im Mai dieses Jahres die nöthige Zeit finden konnte, die erforderlichen experimentellen Daten aufzusuchen. Die Publication musste ich abermals wegen Mangel an Zeit auf die Ferien verschieben. Mittlerweile erschien im Maihefte dieser Annalen eine Arbeit von E. Edlund „Bemerkungen über die galvanische Ausdehnung“, in welcher ebenfalls die Temperaturvertheilung im galvanisch erwärmten Drahte berechnet wird.

Die Wege, auf welchen Edlund und ich zur selben Gleichung der Temperaturvertheilung und zu den nothwendigen numerischen Daten gelangen, sind aber wesentlich verschieden, meine Ableitung zugleich allgemeiner, so daß ich berechtigt zu seyn glaube, auch jetzt noch, nach dem Erscheinen von Edlund's Arbeit, meine Untersuchungen der Oeffentlichkeit übergeben zu dürfen.

Der galvanische Strom leistet in jedem körperlichen Elemente des Leitungsdrähtes, während ein und derselben Zeit, eine gleich grosse Arbeit, welche zum grössten Theile als Wärmebewegung auftritt.

In den ersten Momenten, nachdem die Leitung geschlossen ist, wird sich diese Arbeit durch eine Temperaturerhöhung kundgeben, in deren weiterer Folge der galvanische Widerstand wächst. Gleichzeitig geht durch die Oberfläche des Drähtes Wärme an die Umgebung über, und wenn für jedes körperliche Element die in einer bestimmten Zeit erregte Wärmemenge derjenigen gleich geworden ist, welche durch die umgebenden Theilchen weggeföhrt wird, dann ist der stationäre Zustand eingetreten, für welchen wir die Temperaturvertheilung berechnen wollen. Es ist sofort ersichtlich, daß die centralen Theile des Drähtes eine höhere Temperatur als die peripherischen besitzen müssen, wir wollen aber trotzdem in der nun auszuführenden Rechnung voraussetzen, der Widerstand sey durch den ganzen Querschnitt des Drähtes derselbe, also wirklich die in jedem körperlichen Elemente des Drähtes erregte Wärmemenge für ein und dieselbe

Zeit dieselbe. Der berechnete Temperaturunterschied für die centralen und peripherischen Theile wird zufolge dieser Voraussetzung gegenüber dem wirklichen zu gross ausfallen; wenn sich nun trotzdem herausstellt, dass der berechnete Temperaturunterschied äußerst klein ist, gegenüber der gesammten Temperaturerhöhung, so folgt hieraus die Erlaubtheit der gemachten Annahme.

Sehen wir von den nahe an den Enden gelegenen Theilen des Drahtes ab, so ist die Temperaturvertheilung in allen Querschnitten identisch, und unser Problem reducirt sich auf ein Problem der Ebene.

Der Zuwachs an Wärmebewegung, welchen ein Flächen-element des kreisförmigen Querschnittes in der Zeit  $dt$  durch Wärmeleitung von den umgebenden Theilen erfährt, ist dargestellt durch

$$k \left( \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} \right) dx dy dt,$$

worin  $u$  die Temperatur des betreffenden Flächenelementes und  $k$  das Wärmeleitungsvermögen bedeutet.

Ferner erregt dem Joule'schen Gesetze zufolge der galvanische Strom in diesem Flächenelemente während derselben Zeit  $dt$  die Wärmemenge

$$w i^2 dx dy dt.$$

Die Bedeutung von  $i$  und  $w$  ist sofort zu erkennen.

Für den stationären Zustand muss die Summe beider Ausdrücke der Null gleich seyn, daher

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + J = 0; \quad J = \frac{w i^2}{k}.$$

Führt man statt  $u$  die Variable

$$v = u + \frac{J}{4} r^2$$

ein, so erhält man die bekannte Differentialgleichung, deren Integral der natürliche Logarithmus des Centralabstandes  $r$  ist. Das Integral unserer Differentialgleichung wird daher

$$u = A - \frac{J}{4} r^2 + B \log r.$$

Da für  $r = 0$  die Temperatur keinenfalls unendlich seyn kann (es müste ja in diesem Falle im Centrum die lebhafteste Verdampfung eintreten und der Draht platzen), so muß  $B = 0$  seyn, und es bleibt nur noch die Constante  $A$  zu bestimmen.

Aus dem Umstande, daß jenes Glied, welches das Integral der gewöhnlichen Differentialgleichung der Wärmeleitung für den stationären Zustand bildet, hier ausfällt, folgt, daß man die Lösung unserer Aufgabe auch wird finden können ohne überhaupt auf jene Differentialgleichung zurückzugehen. Es ist dies der Weg, welchen Edlund eingeschlagen.

Ist die Oberflächentemperatur des Drahtes  $\tau$  bekannt, so erhält man als vollständig bestimmtes Integral

$$u = \tau + \frac{J}{4} (a^2 - r^2) \dots \quad (I),$$

wo  $a$  der Halbmesser des Drahtes ist. Es kann aber statt der Oberflächentemperatur auch der Coefficient der äußeren Leitfähigkeit  $H$  gegeben seyn, in welchem Falle als Oberflächenbedingung noch die folgende Differentialgleichung befriedigt seyn muß

$$\frac{\bar{du}}{dr} + h(\bar{u} - U) = 0.$$

Der oben beigefügte Querstrich soll andeuten, daß von den hierdurch ausgezeichneten Größen die Oberflächenwerthe zu nehmen sind.  $U$  ist die Temperatur der umgebenden Luft und der in der Nähe befindlichen Körper, ferner ist  $h = \frac{H}{k}$  gesetzt.

Auf diesem Wege gelangt man nach einer einfachen Rechnung zu folgendem Werthe von  $u$ :

$$u = U + \frac{J}{2h} a + \frac{J}{4} (a^2 - r^2) \dots \quad (II).$$

Durch die Formen der Gleichungen (I) und (II) sind die Maasseinheiten der Größen  $J$  und  $h$  schon bestimmt, da keine Proportionalitätsfactoren beigefügt sind.

In den Fällen, welche hier vorzugsweise in Betracht kommen, nämlich, dass die Temperatur an der Oberfläche gegeben ist, und die der centralen Theile gefunden werden soll, wird die Gleichung (I) anzuwenden seyn. Da jedoch in dieser der Coefficient  $J$  für specielle Fälle numerisch nicht sofort angegeben werden kann, so ist es jetzt unsere weitere Aufgabe  $J$  zu bestimmen.

Dies kann dadurch geschehen, dass man bei einer grossen Platte die eine Seite auf einer constanten Temperatur erhält, und die Temperatur der anderen Gränzfläche beobachtet, oder dass man die Innenfläche einer dickwandigen Röhre auf constanter Temperatur erhält und die Temperatur der Außenfläche beobachtet, oder auf andere ähnliche Arten.

Ich habe zu dieser Bestimmung eine Röhre verwendet, deren innerer Durchmesser 9<sup>mm</sup> und deren äusserer 43<sup>mm</sup> betrug. Ich stellte dieselbe vertical und ließ von unten nach oben durch die innere Bohrung warmes Wasser strömen und zwar so rasch, dass die Temperatur des Wassers bei der Eintrittsstelle nur um einige Zehntel Grade höher als bei der Austrittsstelle war; man konnte daher für jeden Theil der Röhre die Temperatur an der Innenfläche angeben. Mit dieser wurde jene verglichen, welche sich an der äusseren Oberfläche zeigte, und welche dadurch sehr genau bestimmt werden konnte, dass an einzelnen Stellen Stearin aufgetragen wurde (gerade so, wie ich es bei der Untersuchung über die galvanische Ausdehnung<sup>1</sup>) mit den Drähten gemacht hatte) und die verschiedenen Stadien des schmelzenden Stearins beobachtet wurden. Das Stearin bildete vereinzelte kleine Pünktchen, schmale Streifen und dergl., so dass die Ausstrahlungsverhältnisse als hierdurch unverändert angesehen werden konnten.

1) „Ueber die Änderungen der Elasticität und der Länge eines vom galvanischen Strom durchflossenen Drahtes.“ Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss. zu Wien, Bd. LXVII, Abth. II, 1873 und Pogg. Annalen Bd. CL, S. 368.

Um die Temperaturen genau zu kennen, bei welchen die verschiedenen Stadien des Schmelzens eintreten, leitete ich ein anderesmal auch durch eine dünne 10<sup>mm</sup> lange Röhre von etwa 8<sup>mm</sup> innerem und 9<sup>mm</sup> äusserem Durchmesser warmes Wasser und beobachtete die verschiedenen Stadien. Hier war unmittelbar die Temperatur des Wassers gleich zu setzen der Temperatur an der äusseren Oberfläche. Als das Wasser durch die dicke Röhre geleitet wurde, musste die Erwärmung, sobald das Wasser eine Temperatur angenommen hatte, die der des schmelzenden Stearin nahe kam, sehr langsam vorgenommen werden, um den stationären Zustand möglichst zu erreichen. Ich erhöhte die Temperatur in  $\frac{1}{4}$  Stunde ungefähr um  $\frac{1}{2}$  bis 1 Grad C. Aus der folgenden Zusammenstellung ersieht man am besten den Vorgang bei der Beobachtung.

	Grad Celsius		
	dünne Röhre	dicke Röhre	Unterschied
Das frisch aufgetragene Stearin beginnt zum ersten Male zu schmelzen . . .	55,3	57,7	2,4
Das Stearin wird breiartig und ist vielfach schon geschmolzen . . . . .	56,0	58,5	2,5
Das Stearin ist zum ersten Male ganz geschmolzen . . . . .	57,0	59,3	2,3
Beim Erniedrigen der Temperatur wird das Stearin wieder breiartig . . . .	55,0	56,5	1,5
nahezu fest . . . . .	54,2	56,0	1,8
ganz fest . . . . .	53,8	55,3	1,5
Bei wiederholtem Erwärmen wird das Stearin abermals weich . . . . .	54,2	56,6	2,4

Es ist aus der Tabelle zu erkennen, dass selbst bei den so langsam Temperaturveränderungen die Abweichungen vom stationären Zustande ganz merklich sind, so dass die mittlere Differenz beim Erwärmen von 2°,4 zu groß und die mittlere Differenz beim Erkalten von 1°,6 zu klein ausfällt. Da ich das Steigern und Vermindern der Temperatur des durchströmenden Wassers gleich schnell vornahm, so folgt als richtiger Mittelwerth 2°,0 C. Dass

das schon einmal auf der Röhre geschmolzen gewesene Stearin beim wiederholten Erwärmern schon bei niederer Temperatur zu schmelzen beginnt, hat seinen Grund wohl darin, dass es dann enger an der Oberfläche anliegt und eine compactere Structur besitzt.

Es ist uns nun für die dickere Röhre der Temperaturunterschied an der inneren und äusseren Fläche gegeben und diese Angabe genügt, um für Messing die Grösse  $h$  berechnen zu können.

Es versteht sich von selbst, dass ich die dünne und dicke Röhre vor den Messungen mit solchem Schmirgel abrieb, welcher gewöhnlich zum Abreiben der Drähte benutzt wird. Ferner muss ich noch bemerken, dass die Röhre genau genommen nicht aus *der Legirung* bestand, die man gewöhnlich als Messing bezeichnet, wohl aber aus einer dem Messing sehr verwandten Legirung.

Die Differentialgleichung für die einfache Wärmeleitung und den stationären Zustand lautet

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} = 0.$$

Als Nebenbedingung für die äusseren und innere Oberfläche hat man

$$\begin{aligned}\frac{du}{dr} + h(\bar{u} - U) &= 0 \\ u &= \tau_2.\end{aligned}$$

Als Integral erhält man wieder den natürlichen Logarithmus des Centralabstandes mit zwei Constanten, welche sich aus den zwei Oberflächenbedingungen bestimmen; werden mit  $c_1$  und  $c_2$  die Radien der äusseren und inneren Oberfläche bezeichnet, so folgt hieraus für  $u$

$$u = \tau_2 + \frac{\tau_2 - U}{\frac{1}{c_1 h} + \log c_1 - \log c_2} (\log c_1 - \log r);$$

setzt man in dieser Gleichung  $r = c_1$ , so folgt  $u = \bar{u} = \tau_1$ , und da wir dann in der Gleichung keine Unbekannte als  $h$  haben, so folgt

$$h = \frac{\tau_2 - \tau_1}{c_1 (\tau_1 - U) (\log c_1 - \log c_2)},$$

$h$  ist für ein und dasselbe Metall, ein und dieselbe Oberflächenbeschaffenheit und ähnliche Verhältnisse der in der Nähe befindlichen Körper, eine constante Grösse. Ist diese bekannt, so lässt sich jetzt auch  $J$  berechnen. Es folgt nämlich aus dem Vergleiche der Gleichungen (I) und (II)

$$\tau = U + \frac{Ja}{2h}$$

und hieraus

$$J = \frac{2h}{a} (\tau - U).$$

$J$  gilt aber nur für einen bestimmten Draht und eine bestimmte Differenz zwischen den Temperaturen der Oberfläche des Drahtes und der umgebenden Substanzen.

Ist  $h = \frac{H}{k}$  für ein Metall gefunden, so kann es auch leicht für andere Metalle erhalten werden. Der äußere Wärmeleitungscoefficient  $H$  kann nämlich für alle Metallflächen, wenn sie mit dem gleichen Schmirgel geputzt wurden, näherungsweise als gleich betrachtet werden, und für das Wärmeleitungsvermögen  $k$  sind die Relativzahlen bekannt.

Zur numerischen Berechnung des  $h$  für Messing haben wir  $\tau_2 - \tau_1 = 2,0$ ;  $\tau_1 - U = 38^\circ$ ;  $c_1 = 43\text{mm}$ ;  $c_2 = 9\text{mm}$ ; hieraus folgt

$$h = 0,00078.$$

Einer der von mir zur Ermittlung der galvanischen Ausdehnung untersuchten Messingdrähte hatte einen Halbmesser von  $a = 0,25\text{mm}$ . Bezeichnen wir mit  $u$ , die Temperatur im Centrum des Querschnittes, so ergibt sich bei  $\tau = 55^\circ,5$  und  $U = 18^\circ$ .

$$u - \tau = 0^\circ,0037 \text{ C.}$$

Um die Berechnung dieser Grösse auch für einen Eisen- und Platindraht durchzuführen, nehmen wir für  $k$  die Verhältniszahlen

Messing . . . . .	231
Eisen . . . . .	119
Platin . . . . .	84.

Hat ferner der Eisendraht einen Halbmesser von  $a = 0,38\text{mm}$ , der Platindraht von  $a = 0,36\text{mm}$ , so ergiebt sich für den

$$\begin{aligned} \text{Eisendraht} & \dots u - \tau \left\{ = 0,0110 \right. \\ \text{Platindraht} & \dots , \quad \left. \{ = 0,0149. \right. \end{aligned}$$

Mit Hülfe dieser Angaben lässt sich weiteres berechnen, wie gross der Unterschied in der Länge eines Drahtes ist, der einmal gleichmässig auf die Temperatur von  $\tau^{\circ}$  gebracht wird, und der ein anderes Mal galvanisch erwärmt wird, so dass er an der Oberfläche eine Temperatur von  $\tau^{\circ}$  besitzt. Der Unterschied dieser zwei Längen ist diejenige Grösse, in welcher die Erklärung der galvanischen Ausdehnung von vornherein möglicher Weise gesucht werden könnte.

Die Länge  $l$  eines auf  $\tau^{\circ}$  erwärmten Drahtes, der bei  $0^{\circ}$  die Länge  $l_0$  hat, und dessen Ausdehnungscoefficient  $\alpha$  ist, wird bekanntlich durch die Relation dargestellt

$$l = l_0(1 + \alpha \tau).$$

Eine Faser des galvanisch erwärmten Drahtes hat aber die Länge

$$z = l_0(1 + \alpha u),$$

worin für  $u$  der durch die früheren Entwicklungen gefundene Werth einzusetzen ist. Bildet man nun das Integral über den ganzen Querschnitt vom Ausdruck  $z r dr dq$ , dividirt es durch die Fläche des Querschnittes, so ergiebt sich die Länge des galvanisch erwärmten Drahtes  $L$ . Der Unterschied zwischen der Länge des galvanisch und des gleichmässig erwärmten Drahtes wird dann

$$\begin{aligned} L - l &= \frac{1}{2} \alpha a^2 l_0 J \\ &= \frac{1}{2} \alpha l_0 (u - \tau). \end{aligned}$$

Dieser Unterschied ist um so grösser, je länger der Draht ist, es ist daher besser denselben in Procenten der ursprünglichen Länge auszudrücken.

Nimmt man für

Messing . . . .	$\alpha = 0,000019$
Eisen . . . .	$\alpha = 0,000012$
Platin . . . .	$\alpha = 0,000009,$

so erhält man

$$\frac{100(L - l)}{l_0} = \text{für den Draht aus } \left\{ \begin{array}{ll} \text{Messing} & . \quad 0,0000034 \\ \text{Eisen} & . \quad 0,0000066 \\ \text{Platin} & . \quad 0,0000088. \end{array} \right.$$

Während nun Edlund's und meine Beobachtungen gezeigt haben, daß dieser Quotient mehrere ganze Einheiten bis 10 und 20 derselben betrage, ergeben sich hier nur einige Millionstel dieser Einheiten, daher die Annahme, die galvanische Ausdehnung sey nicht durch die Temperaturunterschiede der centralen und peripherischen Theile des Drahtes bewirkt, sich als vollständig richtig herausstellt.

Ich muß jetzt noch auf die von Edlund gefundenen Temperaturunterschiede  $u_e - \tau$  zu sprechen kommen. Edlund findet für einen Platindraht, bei welchem  $\alpha = 0,27^{\text{mm}}$ , und für einen Temperaturunterschied  $\tau - U = 73^{\circ}\text{C}$ , den Werth  $u_e - \tau = 0^{\circ},00345\text{ C}$ . Nach den durch meine Experimente gefundenen Daten müßte der Werth  $0^{\circ},0213$  betragen, also ungefähr 6 mal so groß seyn. Für den hier in Betracht kommenden Zweck stimmen die auf so gänzlich verschiedene Art gefundenen Resultate genügend überein. Genauere Werthe ließen sich ohne erhebliche Schwierigkeiten durch wiederholte Versuche, durch Bestimmung des  $h$  mit Röhren von verschiedenem Materiale etc., finden<sup>1)</sup>.

Die Existenz einer eigenen galvanischen Ausdehnung wurde in jüngster Zeit auch durch Hrn. Dr. F. Exner<sup>2)</sup> in Abrede gestellt. Edlund macht hierzu die richtige Be-

- 1) In der Edlund'schen Abhandlung ist zufolge eines Druckfehlers die specifische Wärme des Platins statt mit 0,0324 unrichtig mit 0,0524 angegeben.
- 2) Sitzungsber. d. Wien. Akad. LXXI Maiheft und Pogg. Ann. Ergänzungsbd. VII, Heft III.

merkung, dass die Versuche Exner's nicht gegen, sondern für die Richtigkeit der behaupteten Erscheinungen sprechen, dennoch glaube ich die eigenthümliche Schlussweise des Hrn. Exner noch etwas beleuchten zu dürfen.

Edlund und ich haben nachgewiesen, dass ein galvanisch erwärmer Draht sich mehr ausdehnt, als ein auf andere Art erwärmer, haben aber auch deutlich und wiederholt ausgesprochen, dass die galvanische Ausdehnung sich erst dann zeigt, wenn der Draht sich bereits erwärmt hat. Wir haben deshalb beide die galvanische Ausdehnung in Procenten der Wärmeausdehnung berechnet und ich habe deshalb auch die Hypothese aufgestellt, dass bei einem galvanisch erwärmten Drahte die Wärmeschwingungen vorzugsweise in der Richtung des Stromes stattfinden.

Mag diese Hypothese richtig seyn oder nicht, sie beweist ganz deutlich, dass ich mir die Erscheinung an die Wärmeausdehnung geknüpft dachte, worauf auch alle Eigenchaften der galvanischen Ausdehnung hinweisen.

Hr. Dr. Exner will nun nachweisen, dass es keine selbstständige galvanische Ausdehnung gäbe, und verhindert zu diesem Behufe die Wärmeausdehnung.

Das Mittel ist allerdings radical, allein Hr. Exner wird damit ebensowenig etwas gegen die galvanische Ausdehnung beweisen, als irgend Jemand gegen die Existenz polarisirten Lichtes beweisen wird, der uns durch 16 Druckseiten Beobachtungsreihen zur Ueberzeugung bringt, im Schatten eines undurchsichtigen Schirmes kein polarisiertes Licht gefunden zu haben. Die Analogie ist vollständig, wenn man damit folgende interessante Schlussweise Hrn. Exner's vergleicht. Derselbe verhindert, wie schon erwähnt, die Erwärmung des Drahtes, es tritt dann keine galvanische Verlängerung auf, und schliesst hieraus, dass diejenigen Wärmeschwingungen, deren Entstehen er sorgfältigst hintangehalten hat, auch nicht polarisiert gewesen waren, somit meine Hypothese „jeder thatssächlichen Grundlage entbehrt“. Ist es dem Hrn. Dr. Exner nicht aufgefallen, dass, wenn meine Hypothese richtig ist, nach

seiner Methode eine galvanische Ausdehnung gar nicht gefunden werden darf, und wenn er eine solche gefunden hätte, also eine galvanische Verlängerung ohne auftretende Wärme, dann meine Hypothese falsch seyn müßte?

Eines der Experimente Edlund's mag Hrn. Exner vielleicht Veranlassung zu seiner Untersuchung gegeben haben. Edlund erwärmte nämlich unter anderem einen Draht galvanisch auf eine bestimmte Temperatur, während derselbe durch einen Luftstrom abgekühlt wurde. Ein anderes Mal brachte er ihn zur selben Temperatur, während der Draht von Eiderdaunen umgeben war. Die Stromstärken verhielten sich in diesen zwei Fällen, wie tg 49 : tg 27, und im letzteren Falle war die Ausdehnung um 5 Proc. kleiner. Dieses Experiment beweist aber nur, daß die galvanische Verlängerung nicht ausschließlich von der erreichten Temperatur, sondern auch von der Stromstärke abhängt, ein Resultat, das nach den übrigen Erscheinungen wohl von vornherein nicht anders erwartet werden konnte.

Graz, am 12. August 1876.

---

**V. Bemerkungen zu einem Ausspruche von  
F. Kohlrausch über Thermoelektricität;  
von R. Clausius.**

---

In einem interessanten Aufsatze über Thermoelektricität, Wärme- und Elektricitätsleitung von F. Kohlrausch<sup>1)</sup> ist ein Einwand gegen die von mir aufgestellte Theorie der thermoelektrischen Ströme erhoben, welcher sich auf einen in der mechanischen Wärmetheorie scheinbar hervortretenden Widerspruch stützt, und daher einer näheren Beleuchtung bedarf. Da die Stelle, welche den Einwand

1) Göttinger Nachrichten Febr. 1874 und diese Ann. Bd. 156, S. 601.

nicht  
unden  
etende  
  
xner  
geben  
einen  
hrend  
in an-  
hrend  
strom-  
tg 27,  
Proc.  
ls die  
er er-  
stärke  
einun-  
werden

enthält, nur kurz ist, so wird es am besten seyn, sie hier wörtlich anzuführen.

Nachdem Kohlrausch gesagt hat, die mechanische Wärmetheorie nehme bei der Bestimmung der von der Wärme geleisteten Arbeit auf die durch Leitung ausgeglichene Wärme keine Rücksicht, und wer dieses Verfahren unter allen Umständen als erlaubt ansehe, werde daraus gegen seine Hypothese, daß ein Wärmestrom Arbeit leisten könne, einen erheblichen Einwand ableiten, fährt er fort:

„Nun liegt aber im Gebiete der Elektricität ein anderer Fall vor, der nach meiner Ansicht mit den Grundsätzen der mechanischen Wärmetheorie, oder mit anderen Worten, mit dem Clausius'schen Satze, daß die Wärme nicht von selbst aus niederer zu höherer Temperatur übergeht, nicht anders in Uebereinstimmung gebracht werden kann, als wenn man der Wärmeleitung eine *wesentliche* Rolle bei dem Vorgang zuschreibt. In seiner Polemik gegen Clausius hatte Tait den genannten Grundsatz als unrichtig hingestellt, weil man mittelst einer Thermosäule von geringer Temperatur einen Draht zum Glühen bringen könne. Clausius widerlegt diesen Einwand leicht, indem ja die Temperaturerhöhung der in dem Drahte entwickelten Wärme nach Peltier begleitet ist von einem Uebergang einer anderen Wärmemenge von der warmen zur kalten Löthstelle der Thermosäule (Pogg. Annalen Bd. CXLVI, S. 310). Bei dieser Widerlegung wird indessen offenbar vorausgesetzt, was ja auch in Wirklichkeit immer zutrifft, daß die in dem erhitzen Drahte entwickelte Temperatur eine Gränze hat. Könnte man diese Temperatur beliebig steigern, so würde durch den Uebergang einer endlichen Wärmemenge in der Thermosäule zu einer um eine endliche Grösse niedrigeren Temperatur eine andere endliche Wärmemenge zu beliebig hoher Temperatur erhoben werden können.“

Die im letzten Satze erwähnte Erhebung einer endlichen Wärmemenge zu beliebig hoher Temperatur ist es,

in welcher Kohlrausch einen in meiner Theorie liegenden Widerspruch erblickt, und durch welchen er bewogen wird, auch die Wärmeleitung in den Kreis der Betrachtungen zu ziehen. Ich glaube aber nachweisen zu können, daß bei einer, wenn auch bisher nicht bestimmt ausgesprochenen, so doch ganz im Geiste der mechanischen Wärmetheorie liegenden Auffassung der Sache dieser Widerspruch, auch ohne die Hinzuziehung der Wärmeleitung verschwindet.

Um die Natur des betreffenden Vorganges, welchen Kohlrausch für die Thermosäule hervorgehoben hat, besser beurtheilen zu können, wird es zweckmäßig seyn, zu zeigen, daß er auch bei anderen thermodynamischen Maschinen, z. B. bei der Dampfmaschine, vorkommen kann. Bei dieser nimmt der die Wirkung der Wärme vermittelnde Stoff (das Wasser) im Kessel, dessen absolute Temperatur  $T_1$  heissen möge, Wärme auf, und im Condensator, dessen absolute Temperatur wir  $T_0$  nennen wollen, giebt er wieder Wärme ab. Die abgegebene Wärmemenge ist aber geringer als die aufgenommene, und den Ueberschuss der letzteren können wir, wenn wir von den durch die Unvollkommenheiten der Maschinen bedingten Verlusten absehen, als in Arbeit verwandelt betrachten. Bezeichnen wir also die während der Zeiteinheit im Kessel aufgenommene Wärmemenge mit  $Q + q$ , und die im Condensator abgegebene mit  $Q$ , so ist  $q$  die in Arbeit verwandelte Wärmemenge, während  $Q$  die von der Temperatur  $T_1$  zur Temperatur  $T_0$  übergehende Wärmemenge ist.

Wenn nun die von der Maschine geleistete Arbeit dazu verwandt wird, einen Reibungswiderstand zu überwinden, so verwandelt sie sich dabei wieder in Wärme, und es kommt somit jene Wärmemenge  $q$ , welche zu der Arbeit verbraucht wurde, in den sich reibenden Körpern, deren absolute Temperatur  $T_2$  seyn möge, wieder als Wärme zum Vorschein. Man kann also sagen, diese Wärmemenge sey von der Temperatur  $T_1$ , bei welcher sie von der Maschine aufgenommen wurde, zur Temperatur  $T_2$  überge-

führt. Da nun die Temperatur  $T_2$ , der sich reibenden Körper beliebig hoch seyn kann, so gelangen wir auch hier zu jenem Resultate, daß durch den Uebergang einer endlichen Wärmemenge ( $Q$ ) zu einer um eine endliche Gröfse niedrigeren Temperatur (von  $T_1$  zu  $T_0$ ) eine andere endliche Wärmemenge ( $q$ ) zu einer beliebig hohen Temperatur ( $T_2$ ) erhoben werden kann.

Um nun zunächst zu sehen, in welcher Weise die Temperatur  $T_2$  in den Gleichungen der mechanischen Wärmetheorie vorkommt, haben wir den für den Aequivalenzwerth des Ueberganges der Wärmemenge  $q$  von der Temperatur  $T_1$  zur Temperatur  $T_2$  geltenden Ausdruck zu bilden, nämlich:

$$q \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right).$$

Dieser Ausdruck stellt, wenn  $T_2 > T_1$ , eine negative Gröfse dar, deren absoluter Werth mit wachsender Temperatur  $T_2$  zunimmt; aber diese Zunahme findet nicht etwa bis ins Unbegrenzte statt, sondern der Ausdruck nähert sich bei fortwährendem Wachsen von  $T_2$  nur dem bestimmten endlichen Werthe

$$-\frac{q}{T_1},$$

welcher der Aequivalenzwerth der Verwandlung der Wärmemenge  $q$  von der Temperatur  $T_1$  in Arbeit ist. Dieses Verhalten der Formeln ist ganz mit jenem Umstand in Uebereinstimmung, daß eine einmal in Arbeit verwandelte Wärmemenge auch wieder in Wärme von beliebig hoher Temperatur verwandelt werden kann.

Wenn nun aber hierbei von beliebig hoher Temperatur die Rede ist, so darf darunter doch nicht eine im streng mathematischen Sinne *unendlich* hohe Temperatur verstanden werden, sondern es ist in dieser Beziehung durch die Natur der Sache selbst, ohne daß man die Wärmeleitung dabei zu Hülfe zu nehmen braucht, eine gewisse Gränze gegeben.

Um dieses zu erkennen und von der Art der Größen,

um welche es sich dabei handelt, einen ungefähren Begriff zu bekommen, wollen wir uns denken, die von der Maschine geleistete Arbeit werde zunächst dazu angewandt, einen Körper von gegebener Masse, z. B. eine Masseneinheit, in Bewegung zu setzen, und diese Massenbewegung sey es nun, welche in Wärme verwandelt werden solle. Dann haben wir es nur noch mit der Verwandlung einer Art von Bewegung in eine andere Art von Bewegung zu thun, wodurch der Schluss über die Höhe der erreichbaren Temperatur erleichtert wird.

Wenn man unter der absoluten Temperatur eines Körpers die mittlere lebendige Kraft der einzelnen bei der als Wärme bezeichneten Bewegung sich selbstständig bewegenden Körpertheilchen, nämlich der Atome, versteht, so kann man den Satz, dass ein Körper einen anderen nicht zu einer höheren Temperatur, als er selbst hat, erwärmen kann, so ausdrücken: Die Atome des einen Körpers können den Atomen des anderen keine Bewegungen mittheilen, deren mittlere lebendige Kraft grösser ist, als ihre eigene. Wenden wir diesen Satz nun auch auf den Fall an, wo eine sich im Ganzen bewegende Masseneinheit die Atome eines Körpers in schnellere Bewegung versetzen und dadurch Wärme erzeugen soll, so können wir sagen, dass die höchste dadurch erreichbare Temperatur diejenige seyn würde, bei welcher ein einzelnes Atom eine eben so grosse lebendige Kraft hätte, wie die ganze bewegte Masseneinheit. Hierdurch gelangen wir zu einem ganz außerordentlich grossen aber nicht gerade zu einem *unendlich* grossen Werthe, ähnlich wie die Masse eines Atoms gegen eine Masseneinheit außerordentlich klein, aber nicht gerade unendlich klein ist.

Natürlich soll diese Betrachtung nicht dazu dienen, uns einen bestimmten ein für allemal geltenden Werth als Gränze der erreichbaren Temperaturen zu geben, da ja mit der Grösse der Arbeit auch die lebendige Kraft der Massenbewegung, welche an ihre Stelle gesetzt werden

kann, v.  
stellung

In  
ist die  
erreicht  
Gleichu  
betrach  
proken  
die re  
ihrer  
freilich  
normal  
hen, d  
sie fas  
nur w  
Form  
den H  
Unend

B

VII

An  
die D  
1) D

2)

2)

kann, verschieden ist, aber sie giebt wenigstens eine Vorstellung von der Ordnung der betreffenden Größen.

In den Gleichungen der mechanischen Wärmetheorie ist die hier besprochene Beschränkung in Bezug auf die erreichbaren Temperaturen nicht ausgedrückt. In diesen Gleichungen kommen nämlich, wie wir es in den oben betrachteten Aequivalenzwerthen gesehen haben, die reciproken Werthe der Temperaturen vor, und dabei sind die reciproken Werthe jener hohen Gränztemperaturen ihrer Kleinheit wegen vernachlässigt. Darin liegt nun freilich eine Ungenauigkeit, indessen wird man bei der normalen Höhe jener Gränztemperaturen gewiß zugestehen, daß dieses nur eine solche Ungenauigkeit ist, wie sie fast jeder physikalischen Gleichung anhaftet, indem es nur wenige physikalische Gleichungen giebt, die in der Form, in welcher man sie bei den wirklich vorkommenden Processen anwendet, auch in aller Strenge bis ins Unendliche anwendbar sind.

Bonn, Dezember 1876.

---

## VI. Ueber den galvanischen Widerstand der Haloidverbindungen<sup>1)</sup>; von R. Lenz.

---

Angeregt durch eine Untersuchung Hittorf's<sup>2)</sup> über die Elektrolyse eines Gemenges von KCl und KJ, aus

1) Diese Untersuchungsreihe war bereits Mitte October zum Abschluß gelangt, ist aber wegen verschiedener Umstände erst jetzt <sup>30. Nov.</sup>  
<sup>12. Dec.</sup> 1876 der Akademie (zu St. Petersburg) vorgelegt worden. Doch habe ich über dieselbe bereits am <sup>2.</sup> Nov. der hiesigen physikal. Gesellschaft referirt, bevor mir Kohlrausch's Abhandlung im 10. Heft von Pogg. Ann. pro 1876 bekannt war.

2) Diese Ann. Bd. CIII, S. 1.

welcher er gefunden, daß die Leitungsfähigkeit dieser Salze bei gleicher Anzahl Molekülen in den Lösungen einander gleich sind, ferner auch durch eine Bemerkung Quincke's<sup>1</sup>), daß aus den Versuchen Hittorf's der eben ausgesprochene Satz nicht mit Nothwendigkeit folge, habe ich für eine grössere Anzahl von Haloidverbindungen verschiedener Basen die galvanischen Widerstände untersucht. Ein fernerer Umstand, der mich veranlaßte der Untersuchung gerade solche Verbindungen zu unterwerfen, lag darin, daß diese Verbindungen so ausnehmend gleiche physikalische Verhältnisse zeigen, namentlich für die einwirthigen Basen; es ließ sich daher erwarten, daß auch in der Leitungsfähigkeit ihrer Lösung eine gesetzmässige Beziehung leichter werde nachweisbar seyn, als für andere complicirtere Verbindungen.

Die Beschreibung meiner hierauf bezüglichen Untersuchungen wird demnächst mit allen nöthigen Details im „*Bulletin de l'Académie des sciences de St. Pétersbourg T. X*“ erscheinen, so daß ich hier dieselbe nicht nochmals anzuführen brauche; ich kann das um so mehr unterlassen, als die Untersuchungsmethoden nichts Neues bieten. Nur einige Bemerkungen will ich hier einfügen, bevor ich die Resultate der Untersuchung mittheile.

Alle Salze wurden in verdünnten Lösungen angewandt und wurden in chemisch aequivalenten Mengen gelöst, so daß angenähert  $\frac{1}{4}$  Aequivalent auf 1000 Gr. Wasser genommen wurden. Die Salze waren die reinsten, die ohne ausdrückliche Bestellung im Handel zu beziehen sind; sie wurden ziemlich trocken gewogen und dann die Lösung durch Zusatz einer gewogenen Wassermenge auf die gewünschte Concentration gebracht. Nur für zwei Gruppen von Verbindungen, die unten angeführt werden sollen, wurde der Salzgehalt maassanalytisch durch Titiren mit Silberlösung bestimmt. Die Widerstände der Lösungen konnten nicht nach der Methode von Kohlrausch<sup>2</sup>) mit

1) Diese Ann. Bd. CXLIV, S. 178.

2) Diese Ann. Bd. CLIV, S. 1.

alternirenden Strömen gemessen werden, da mir die Apparate dazu fehlten, ich habe daher das alte Verfahren von Horsford angewandt. Bei genügender Vorsicht giebt diese Methode sehr wohl brauchbare Resultate und mir will scheinen, daß dieselbe vielfach unterschätzt wird. Alle in dieser Abhandlung angeführten Widerstände beziehen sich auf eine Flüssigkeitssäule von 10 Cm. Länge und 6,58 Cm. Querschnitt und sind alle in Quecksilber-einheiten ausgedrückt. Ferner sind auch die Widerstände, die unter einander verglichen werden, auf dieselbe Temperatur, nahezu  $18^{\circ}$  reducirt.

Diese Angaben mögen genügen, auf alles Nähere verweise ich auf die citirte Originalabhandlung.

In der folgenden Tabelle theile ich nun die Resultate der Untersuchungen mit. Hier steht neben dem Namen des Salzes der gefundene Widerstand unter  $w$ , die Dichtigkeit der Lösung  $d$ , dann das Product  $wd$  und endlich unter  $r$  der Mittelwerth für alle Haloïdverbindungen einer Base, wobei indessen die in Klammern eingeschlossenen Werthe von  $wd$  nicht berücksichtigt sind. Ich bemerke nochmals, daß alle diese Widerstände sich auf eine Temperatur beziehen.

	$w$	$d$	$wd$	$r$
(KJ) <sup>2</sup>	30,00	1,060	31,80	
(K Br) <sup>2</sup>	30,04	1,032	30,99	
(KCl) <sup>2</sup>	31,48	1,023	32,20	31,68
(KCy) <sup>2</sup>	31,27	1,015	31,74	
<hr/>				
(Am J) <sup>2</sup>	30,59	1,044	31,94	
(Am Br) <sup>2</sup>	30,12	1,026	30,90	
(Am Cl) <sup>2</sup>	32,07	1,007	32,29	31,71
<hr/>				
Ba J <sup>2</sup>	36,61	1,081	39,45	
Ba Br <sup>2</sup>	36,28	1,063	38,57	
Ba Cl <sup>2</sup>	41,29	1,054	(43,63)	39,01

	<i>w</i>	<i>d</i>	<i>wd</i>	<i>r</i>
(Na J) <sup>2</sup>	40,47	1,050	42,50	
(Na Br) <sup>2</sup>	39,80	1,037	41,27	
(Na Cl) <sup>2</sup>	39,23	1,020	40,01	41,26
Ca J <sup>2</sup>	45,63	1,049	47,87	
Ca Br <sup>2</sup>	45,52	1,034	47,07	
Ca Cl <sup>2</sup>	(60,52)	1,014		47,47
Zn J <sup>2</sup>	46,87	1,067	50,01	
Zn Br <sup>2</sup>	47,83	1,049	50,18	
Zn Cl <sup>2</sup>	48,54	1,029	49,95	50,05.

Aus dieser Tabelle sieht man, daß die Widerstände *w* innerhalb einer Gruppe, d. h. für Haloïdverbindungen einer Base einander sehr nahe stehen; eine Ausnahme machen nur die in Klammern eingeschlossenen Werthe für die Lösungen von BaCl<sup>2</sup> und CaCl<sup>2</sup>. Doch sind diese Abweichungen sicher nur Fehlern zuzuschreiben und röhren davon her, daß die benutzten Salze Wasser enthielten. Für CaCl<sup>2</sup> habe ich dies direct nachgewiesen an zwei neuen Lösungen von CaCl<sup>2</sup> und CaBr<sup>2</sup>; die Producte *rd* für diese zwei Lösungen betrugen resp. 55,55 und 40,69, also wiederum für das erste Salz vielmehr als für das zweite. Bei der Titirung mit Silberlösung wurde von der letzteren zur Neutralisation verbraucht: für CaCl<sup>2</sup> 16,83, für CaBr<sup>2</sup> hingegen 22,93, während diese Mengen hätten gleich seyn müssen. Berechnet man aus diesen Daten die Widerstände für Lösungen von solcher Stärke, daß zum Neutralisiren 27,66 Cm. Silberlösung erforderlich wären, so erhielt man die Widerstände für aequivalente Lösungen:

für CaCl<sup>2</sup> 33,81, für CaBr<sup>2</sup> 33,74.

Eine Prüfung für BaCl<sup>2</sup> hielt ich weiter nicht für erforderlich.

Ein genauerer Einblick in die Zahlen obiger Tabelle zeigt jedoch, daß im Allgemeinen in jeder Gruppe der Widerstand der Jodide der geringste, der der Chloride

der grösste ist, während die letzteren die geringste, die ersten hingegen die grösste Dichtigkeit zeigen. Es lässt sich daher erwarten, dass die Producte  $wd$  weniger von einander differiren werden als die Widerstände  $w$ . Diese Producte stehen unter  $wd$ ; wie man sieht ist dieses im Allgemeinen zwar nicht der Fall, für die Zinksalze erhält man jedoch durch die ausgeführte Multiplication eine fast vollständige Uebereinstimmung der Zahlen, indem die grösste Differenz noch nicht 0,5 Proc. beträgt, also geringer ist als die Fehler der Widerstandsmessungen. Die Uebereinstimmung, welche für die Zinksalze gefunden wurde, ist deshalb von grösserer Wichtigkeit, weil dieses die einzige Gruppe ist, in welcher der Salzgehalt der Lösung analytisch bestimmt worden war, und die Resultate dieser Gruppe daher weit mehr Zutrauen verdienen als die der übrigen.

Es lag nach dieser Erfahrung nahe zu vermuten, dass die noch bestehenden Schwankungen von  $wd$  in den übrigen Gruppen der Salze dem Umstande zuzuschreiben sind, dass die Salze nicht ganz rein oder nicht ganz trocken waren. Um mich hiervon zu überzeugen, machte ich noch eine Reihe von Messungen an den Kalisalzen, denen ich Rhodankali, statt KCy, zufügte. Hierbei aber bestimmte ich den relativen Salzgehalt durch Titiren mit Silberlösung ( $\frac{1}{16}$  Normallösung). Die Resultate dieser Versuchsreihe sind in der folgenden Tabelle mitgetheilt. Hier bedeutet  $w$  den beobachteten Widerstand,  $v$  das zum Neutralisiren erforderliche Volumen der Titrirflüssigkeit,  $r$  die auf aequivalenten Salzgehalt reducirten Widerstände,  $d$  die Dichtigkeit und  $rd$  wiederum das Product aus  $r$  und  $d$ .

	KJ	KBr	KCl	KRa
$w$	26,82	27,08	28,28	29,30
$v$	28,05	28,32	27,83	27,64
$r$	26,91	27,43	28,15	29,04
$d$	1,0322	1,0230	1,0225	1,0138
$rd$	27,76	28,05	28,77	29,43
Mittel:		28,50		
Diff.	2,6	1,6	1,0	3,2

Auch diese Versuche zeigen demnach, daß bis auf 2 oder 3 Proc. das Product  $rd$  eine Constante ist und daß auch das Rhodankalium einen gleichen Widerstand besitzt, wie die Haloïdverbindungen, trotz der complicirten Zusammensetzung desselben.

Die Bedeutung, welche hier das Product  $rd$  hat, kann folgendermaßen aufgefaßt werden. Zwischen den Lösungen von Salzen einer Gruppe bestehen geringe Differenzen, welche man dem Einflusse der Contraction zuschreiben kann. Denkt man sich nun die Lösungen immer weiter verdünnt, in demselben Maasse aber auch den Querschnitt vergrößert, so nähert sich die Dichtigkeit der Lösung immer mehr der Einheit und der Einfluß der Contraction nimmt zugleich ab. Man ersieht auf diese Weise schließlich einen Gränzwerth, wo die Dichtigkeit 1 und der Widerstand  $rd$  ist. Bei diesem Gränzwerth sind dann die Widerstände der verschiedenen Haloïdverbindungen einander gleich. Um die Richtigkeit dieser Voraussetzung zu prüfen, verglich ich die Widerstände zweier aequivalenter Lösungen von KJ und KCl, die gegen die früher benutzten etwa zur Hälfte verdünnt waren, beide jedoch in demselben Verhältnisse. Hierbei fand ich:

Stärkere Concentr.	für KCl	31,48;	schwächere	30,37
"	" KJ	30,00;	"	30,00
	Diff.	1,48		0,37.

In diesen Zahlen ist zu bemerken, daß der Querschnitt der schwächeren Lösung genau doppelt so groß war als der der stärkeren, direct vergleichbar sind die Widerstände für die Lösung nicht, weil sie sich nicht auf dieselbe Temperatur beziehen; in jeder Reihe aber waren die Temperaturen des Jodid und Chlorid dieselben. Die Dichtigkeiten der verdünnten Lösungen waren für KCl = 1,012, für KJ = 1,030 und daher sind die Producte  $rd$

für KCl starke Lösung	32,20;	schwache Lösung	30,73
" KJ " "	31,80;	" "	30,89
Diff.	0,40;		0,16

Aus diesem Vergleich sieht man in der That, dass bei schwächeren Lösungen die Widerstände einander näher stehen (Diff. 0,37) als bei stärkeren (Diff. 1,48); dass dieser Unterschied aber verschwindet, wenn man das Product  $rd$  bildet.

Um den Einfluss eines noch stärkeren Concentrationsgrades zu prüfen, bereitete ich neue Lösungen von KJ und KCl, die 2 Aequivalente Salz auf 1000 Gr. Wasser enthielten und verdünnte dann diese Lösungen auf  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ , und  $\frac{1}{8}$  Aequivalent. Die erste Lösung war schon recht stark; die des KJ betrug etwa 33 Proc. In der folgenden Tabelle sind die Resultate dieser Prüfung mitgetheilt:

		$r$	$d$	$rd$	Diff. Proc.
2 Aequiv.	KJ	9,011	1,218	10,97	
	KCl	9,961	1,086	10,81	
1 Aequiv.	KJ	17,065	1,1145	19,01	0
	KCl	18,12	1,046	19,00	
$\frac{1}{2}$ Aequiv.	KJ	27,77	1,068	29,66	+ 0,1
	KCl	28,98	1,026	29,75	
$\frac{1}{4}$ Aequiv.	KJ	53,77	1,034	55,60	+ 0,6
	KCl	55,62	1,013	56,32	
$\frac{1}{8}$ Aequiv.	KJ	52,16	1,016	53,03	+ 0,1
	KCl	52,60	1,006	52,92	

Vergleichbar mit einander sind nur je zwei Versuche bei gleicher Concentration, bei verschiedenen Concentrationen waren die Temperaturen nicht ganz gleich. Für die letzte Lösung war der Querschnitt doppelt gegen den der früheren. Aus diesen mit besonderer Sorgfalt gemachten Versuchen folgt demnach, dass in der That das Product  $rd$  constant ist, innerhalb sehr weiter Gränzen.

Die hier mitgetheilten Untersuchungen führen demnach zu dem Resultat:

*„Schwache Lösungen von Haloïdverbindungen einer Base, mit gleicher Anzahl von Salzmolekülen, haben gleiche galvanische Leistungsfähigkeiten.“*

Betrachtet man den Vorgang der Elektrolyse als eine Fortbewegung der mit Elektricität behafteten Theilmolekel eines Salzes<sup>1)</sup>, wie er von Clausius<sup>1)</sup> und Quincke<sup>2)</sup> aufgefaßt wird, so hat man den Widerstand einer Lösung als bedingt nicht direct durch die Eigenschaften der Elektrolyten aufzufassen, sondern durch die der Ionen oder richtiger der Theilmolekel, die durch Elektrolyse entstehen. Was in dieser Beziehung Kohlrausch<sup>3)</sup> von den Wasserstoffsauren sagt, findet dann seine Anwendung auf alle Haloïdsalze einer und derselben Base. Auf Grundlage dieser Anschauungsweise lässt sich der oben ausgesprochene Satz auch so ausdrücken:

*In aequivalenten schwachen Lösungen aller Haloïdsalze einer Base werden die Theilmolekel durch gleich grosse Scheidungskräfte und mit gleich grosser Geschwindigkeit an einander vorbeibewegt.*

Da ferner bei den oben beschriebenen Versuchen innerhalb einer Gruppe stets gleiche Mengen derselben positiven Ione unter gleichen Verhältnissen fortgeführt werden, so kann man wohl mit grosser Wahrscheinlichkeit annehmen, daß sie auch dieselbe absolute Geschwindigkeit besitzen; unter dieser Voraussetzung würde man auch sagen können, daß die Molekel der Halogene gleich grosse absolute Geschwindigkeiten haben.

Bezeichnen wir die Verbindungen einer Base mit den verschiedenen Halogenen als RHI, so haben wir bei den selben folgende Widerstände:

	Na HI	K HI	Am HI	Ca HI	Ba HI	Zn HI
r	41,26	31,68	31,71	47,47	39,16	50,05.

Sucht man nach einem Zusammenhange zwischen diesen Zahlen und irgend welchen andern Eigenschaften der

1) Clausius Abhandlungen 1864, Bd. 2, S. 210 ff.

2) Diese Ann. Bd. CXLIV, S. 1.

3) Diese Ann. Bd. CLIX, S. 269.

Salze,  
einer  
vertre  
bindu  
dem 1  
welch  
punkt  
zwisc  
decke  
dunge  
Stand  
einfach  
bindu  
Ionen  
Const  
tiven  
fachs  
lichke  
die p  
wie d  
setzu  
hydr  
diese  
ähnli  
sucht  
Zinn  
schei

I  
Sum  
stoff  
Lösu  
(NaB  
A 8  
r 4  
rA 3

Diff. in  
Proc.

Poggendo

Salze, so hat man, nach der Auffassung des Vorganges einer Elektrolyse, wie sie von Quincke und Clausius vertreten wird, sein Augenmerk nicht auf diejenigen Verbindungen der Elemente zu richten, in welchen sie in dem Elektrolyten enthalten sind, sondern auf diejenigen, welche bei der Elektrolyse auftreten. Von diesem Gesichtspunkte aus hat sich schon eine sehr einfache Beziehung zwischen den negativen Ionen und den Widerständen aufdecken lassen, so lange man die verschiedenen Verbindungen einer Base mit einander verglich. Von demselben Standpunkte aus gelangt man aber auch ferner zu einer einfachen Relation zwischen den Widerständen der Verbindungen verschiedener Gruppen und ihren positiven Ionen. Man muß aber hierfür eine Annahme über die Constitution der von der Elektricität fortgeföhrten positiven Theilmolekel machen. Es soll nun darüber die einfachste gesetzt werden, die auch die größte Wahrscheinlichkeit unter Allen für sich hat, nämlich diejenige, daß die positiven Theilmolekel dieselbe Beschaffenheit haben, wie die an der Kathode auftretende Ione. Bei der Zersetzung z. B. des KCl erhält man an der Kathode Kalhydrat und Wasserstoff, zu je einem Aequivalent, und dieses sey denn auch die positive Theilmolekel. Ganz ähnlich werden die Molekel aller anderen von mir untersuchten Lösungen betrachtet, ausgenommen diejenige der Zinnchloridlösung, aus welcher ja Zn metallisch ausscheidet.

In der folgenden Tabelle sind nun für diese Ionen die Summen der Aequivalentgewichte der Hydrate + Wasserstoff unter *A* aufgeführt, unter *r* die Widerstände der Lösungen und dann das Product *rA*.

	$(NaHO+H)^2$	$(KHO+H)^2$	$(AmKO+H)^2$	$CaO^2H^2+2H$	$BaO^2H^2+2H$	Zn
<i>A</i>	82,1	114,3	36	76	173,2	65
<i>r</i>	41,26	31,68	31,71	47,47	38,15	50,05
<i>rA</i>	3387	3620	1.3426	3608	2.3391	3253
		Mittel	3445			
Diff. in Proc.	1,7	5,1	0,6	4,7	1,5	5,5

Ein Vergleich der Zahlen dieser Tafel zeigt, daß das Product  $rA$  für alle Gruppen von Haloidverbindungen nahezu constant ist. Dabei ist jedoch zu bemerken, daß bei  $\text{Am Cl}$  und  $\text{Ba Cl}_2$  die Producte mit 3 und  $\frac{1}{2}$  multiplicirt werden müßten, um sie den andern Producten gleich zu machen. Das Resultat dieser Betrachtung läßt sich in folgender Gestalt ausdrücken:

*„Die galvanischen Widerstände von Haloidverbindungen in schwachen Lösungen mit gleicher Anzahl von Molekülen der Salze sind den Aequivalentgewichten der positiven Ionen oder einfachen Multiplen derselben umgekehrt proportional.“*

Wie weit dieses Gesetz allgemeine Anwendung findet, welche Einschränkungen man dabei machen müßt, das zu unterscheiden, müssen fernere Untersuchungen lehren; daher es auch noch zu früh erscheint an dieses Resultat irgend welche theoretische Betrachtungen anzuknüpfen. Unbedingt auf alle Verbindungen läßt es sich nicht anwenden, denn nach diesem Satze müßten die Wasserstoffsäuren einen sehr großen Widerstand besitzen, während derselbe factisch sehr gering ist.

Es lassen sich aus dem angeführten Satze, oder auch aus der Clausius-Quincke'schen Auffassung mancherlei Folgerungen ziehen, deren Prüfung und Untersuchung mich gegenwärtig beschäftigt. Nur eine solche Folgerung sey hier mitgetheilt.

Es läßt sich nach dieser Auffassung erwarten, daß Elektrolyte, welche bei der Elektrolyse gleiche Ionen der Construction, wie der Menge nach, geben, auch gleiche galvanische Widerstände besitzen müssen, unabhängig von der Zusammensetzung des Elektrolyten. Einen solchen Fall bietet die Elektrolyse der Hydrate von Ba, K und Na, und diese Folgerung habe ich in der That bestätigt gefunden, da Lösungen dieser Hydrate mit gleicher Anzahl von Molekülen folgende Widerstände ergaben:

	$\text{Ba O}^2 \text{H}^2$	$(\text{Na H O})^2$	$(\text{K H O})^2$	
$r$	2.19,27	19,59	19,76	Mittel 19,54
Diff.	1,4	0,3	1,1	Proc.

Bemerkenswerth hierbei ist, daß der Widerstand bei Baryumhydrat wieder halbiert werden muß.

Nachdem dieser Aufsatz der Redaction dieser Annalen übergeben, bin ich mit einer Abhandlung des Hrn. F. Kohlrausch in den Nachrichten von der Königl. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Göttingen, Sitzung vom 6. Mai 1876, bekannt geworden, in der er nachweist, daß die Beweglichkeit des Cl, J, Br, ebenso die des K und Am die gleiche ist, wie dies auch aus meinen Untersuchungen folgt. Daß der Widerstand einer Lösung von den sich bildenden Ionen bedingt ist, ist schon von Wiedemann (Galvan. I. Aufl., Bd. 1, S. 424. 1861; II. Aufl., Bd. 1, S. 632. 1872) ausgesprochen worden.

---

## VII. *Ueber die dynamische Bedeutung der in der mechanischen Wärmetheorie vorkommenden Größen; von C. Szily in Budapest.*

---

Einer der wichtigsten physikalischen Grundbegriffe ist der der Temperatur. Alle Größen der Wärmetheorie, ja sogar sämmtliche physikalische Größen stehen zu diesem in Beziehung. Und dennoch gibt es vielleicht keinen einzigen Begriff im Gebiete der Physik, der so unbestimmt und so unklar wäre, wie gerade dieser. Die rationelle Definition sowohl, wie auch das Maaf der Temperatur basirt einzig und allein auf dem vielfach discutirten, aber derzeit noch immer nicht gehörig geklärten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie. Demzufolge ist eine strenge, unanfechtbare Begründung, ein rein dynamischer Beweis des zweiten Hauptsatzes nicht bloß für die Wärmetheorie,

sondern auch für die gesammte Physik von hervorragendem Interesse.

In neuerer Zeit wurde auch schon mehrfach versucht den zweiten Hauptsatz, ohne Zuhilfenahme von thermischen Actionen oder Hypothesen, bloß auf mechanische Principien oder wenigstens auf rein mechanische Annahmen gestützt, abzuleiten. Boltzmann zeigte schon im Jahre 1866, daß man für ein System materieller Punkte, unter gewissen speciellen Voraussetzungen, einen dynamischen Satz aufstellen kann, der nach Form und Bedeutung mit dem zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie identisch zu seyn scheint. Clausius hat im Jahre 1871 diesen Satz etwas erweitert und verallgemeinert. In demselben Jahre hat der Verfasser der ungarischen Akademie der Wissenschaften eine Arbeit vorgelegt, in welcher er darauf aufmerksam machte, daß der dynamische Satz von Boltzmann und Clausius, zum Mindesten der Form nach, mit dem Hamilton'schen Principe übereinstimmt, woraus er folgerte, daß der zweite Hauptsatz in der Thermodynamik dieselbe Rolle spielt, wie das Hamilton'sche Princip in der Dynamik.

Indessen, alle diese dynamischen Ableitungen, obschon frei von thermischen Hypothesen, waren doch nicht frei von mechanischen Annahmen, weshalb sie nicht im Stande waren ein unbedingtes Vertrauen in die Allgemeingültigkeit des zweiten Hauptsatzes zu erwecken. Dieser Umstand hat mich bestimmt, die Frage in einer vor Kurzem veröffentlichten Arbeit<sup>1)</sup> neuerdings zu untersuchen und gestützt auf eine fast prophetische affirmative Aeuferung Rankine's, die Ableitung des zweiten Hauptsatzes direct aus dem Principe von der Erhaltung der Energie, ohne weitere mechanische Annahmen zu versuchen.

Ich muß aber gestehen, daß mir dieser Versuch damals sehr große Schwierigkeiten machte: der Gedankengang ist ziemlich schwerfällig und die Ableitung basirt

1) Der ungarischen Akademie der Wissenschaften am 10. Mai 1875 vorgelegt. — Pogg. Ann. Ergänzungsbd. VII, S. 154.

auf einer wohl nicht ganz unanfechtbaren Grundlage<sup>1)</sup>). Seither verfolgte mich stets der Gedanke, ob man nicht die Ableitung naturgemässer, einfacher und gegen jeden Einwand gesichert führen könnte. Schliesslich kam ich zur Ueberzeugung, dass die *mechanischen Begriffe, welche man sich von den thermischen Grössen gebildet hat, nicht ausreichen und streng genommen nicht einmal richtig sind.* Es zeigte sich, dass vor Allem diese Begriffe gesichtet, und zwar theils verallgemeinert, theils präcisirt werden müssen. Ich habe mich nun entschlossen, manche der gebräuchlichen Begriffe aufzugeben, und durch allgemeinere, nach meiner Ansicht präcisere Begriffe zu ersetzen. Auf diesem Punkte angelangt, zeigte sich sogleich, dass die Ableitung einfacher, naturgemässer wurde, dass ihr auch Anfänger leicht folgen können, wovon mich meine diesjährigen Vorlesungen überzeugt haben.

Hiermit veröffentliche ich die bisher erlangten Resultate, und zwar 1) die nothwendig gewordene Modification der Begriffe in der Wärmetheorie, 2) die auf Grund der abgeänderten Begriffe geführte dynamische Ableitung des zweiten Hauptsatzes und endlich 3) Folgerungen, welche sich aus der neuen Auffassung ergeben.

### 1.

Eine der ersten Annahmen in der mathematischen Behandlung der Wärmetheorie ist die, dass der thermische Zustand eines Körpers constant ist, so lange sein Volumen und seine Temperatur unverändert bleibt. Da hiermit bloß eine einseitige und überdies noch eine ziemlich laxe Definition jenes unbekannten Etwas, das man „Zustand“ zu nennen pflegt, gegeben ist, so können wir im

1) So z. B. finde ich im letzten Hefte des *Philosophical Magazine* die ganz richtige Bemerkung von Hrn. Nichols, dass in meiner damaligen Arbeit keine stichhaltigen Gründe angeführt wurden, warum das Differential der mitgetheilten Wärmemenge als ein Mittelwerth von Energie-Differentialien zu betrachten sey.

Gründe genommen nichts dagegen einwenden. Man hat sich aber gewöhnt, diese Behauptung ganz starr hinzustellen und mit voller Exclusivität zu sagen, daß der thermische Zustand eines Körpers *nur* dann als unverändert betrachtet werden könne und zu betrachten sey, wenn sein Volumen und seine Temperatur fortwährend constant bleibt, und daß bei jeder, selbst bei unendlich kleiner Veränderung des Volumens oder der Temperatur eine entsprechende Veränderung des thermischen Zustandes erfolgt. Ist das aber auch richtig? Oder dürfen wir — wenn wir an dieser Definition des thermischen Zustandes unbedingt festhalten wollen — voraussetzen, daß es in der Natur Körper gäbe, deren Zustand in diesem Sinne als unverändert betrachtet werden dürfe. Ich meinerseits glaube, daß es in der Natur keinen Körper gibt, von dem angenommen werden könnte, daß sein so definirter Zustand auch nur einen endlich kleinen Zeitraum hindurch constant bliebe.

Denn jeder Körper kann als ein Aggregat unzähliger — nicht unendlich vieler — materieller Punkte betrachtet werden, welche sich unter dem Einflusse äußerer und innerer Kräfte, nach gewissen unbekannten Gesetzen, fortwährend bewegen. Stellen wir uns einen Körper mit seinen unzähligen Molekülen und mit den zwischen diesen befindlichen verhältnismäßig großen Zwischenräumen vor. Betrachten wir diese kleine Welt in einem gewissen Augenblicke:  $t = 0$ . Jedes Molekül hat in diesem Augenblick eine gewisse Lage, eine bestimmte Geschwindigkeit und Beschleunigung, wobei es sich auch ereignen kann, daß die Geschwindigkeit mancher gerade Null ist. Und nun möge eine unendlich kleine Zeit  $dt$  verstreichen, nach deren Verlauf wir den Körper von Neuem betrachten wollen. Wir gewahren eine ganz veränderte Constellation! Fast jedes Molekül hat eine veränderte Lage, Geschwindigkeit und Beschleunigung: nur diejenigen sind inzwischen an Ort und Stelle geblieben, deren Geschwindigkeit vorher zufällig 0 war. Hier haben sich die Mo-

lecüle zerstreut, dort sind sie enger aneinander gerückt; hier ist Verdünnung, dort wieder Verdichtung bemerkbar. Dasselbe zeigt sich nicht nur im Innern, sondern auch an der Oberfläche des Körpers; auch dort sind die Molecüle zum Theil weiter von einander, zum Theil enger an einander gerückt. Im nächsten Augenblicke zeigt sich wieder eine andere Gruppierung! Und so geht es in stetiger Veränderung weiter.

Was ist nun die Folge dieser fortwährenden Veränderung? Da die Anzahl der Molecüle zwar sehr groß, aber nicht unendlich ist und da wir vorläufig voraussetzen wollen, daß keine unparalysirten äufseren Kräfte mitwirken, welche die spontane Veränderlichkeit stören könnten, so werden in dem zuvor beliebig gewählten Augenblicke der Wahrscheinlichkeit nach ebenso leicht die partiellen Verdünnungen vorwalten im Verhältniß zu den partiellen Verdichtungen, wie umgekehrt. Dass also in einem nach Belieben gewählten unendlich kleinen Zeitraume die Summe der Ausdehnungen oder die der Zusammenziehungen überwiegen wird, ist gleich wahrscheinlich, vorausgesetzt — ich wiederhole es — daß keine unparalysirten äufseren Kräfte einwirken. Nehmen wir an, daß in dem gewählten Augenblicke die Ausdehnung überwiege, daß also in jenem Zeitelement das Volumen grösster werde. Betrachten wir dann den Körper nach einer Weile wieder, so kann es ebensogut vorkommen, daß nun die Zusammenziehungen vorwalten, daß sich also der Rauminhalt vermindert. Da aber die nacheinander folgenden Veränderungen niemals sprungweise auftreten können, so müssen nothwendig alle Abstufungen der Ausdehnung, so wie auch der Zusammenziehung vorkommen, und zwar in einer continuirlichen Reihenfolge, zwischen den durch die gegebenen Verhältnisse bestimmten Gränzen. Demnach wird das Volumen eine gewisse Zeit hindurch fortwährend zunehmen, bis es eine den Umständen entsprechende äufserste Gränze der Ausdehnung erreicht hat; es bleibt dann einen Moment ungeändert und verringert sich von da an un-

unterbrochen, bis es die Gränze der Verdichtung erreicht; es bleibt dann wieder einen Moment unverändert, um sich alsdann wieder auszudehnen und das beschriebene Spiel zu wiederholen. Es wäre gewiss ein sehr merkwürdiger, äufserst seltener Zufall, wenn sich die partiellen Ausdehnungen und Zusammenziehungen in *jedem Augenblicke* gerade compensiren sollten. Viel wahrscheinlicher ist, *dafs das Volumen einer beständigen Veränderung, einem stetigen Pulsiren unterworfen ist.* Diese Oscillationen unterliegen der sinnlichen Wahrnehmung ebenso wenig, wie die Bewegungen der Moleküle, durch welche dieselben zu Stande kommen. Nach einer jeden ganzen Oscillation kehrt der Körper wieder in die fröhre Phase zurück. Bezeichnen wir mit  $i$  die Dauer einer ganzen Oscillation und mit  $\delta v$  diejenige Volumveränderung, welche während der Zeit  $i$  erfolgen würde, wenn die Geschwindigkeit der Volumänderung die Zeit  $i$  hindurch constant dieselbe bliebe, wie sie während dem Zeitelemente  $dt$  war; dann ist die thatsächliche Volumvariation während der Zeit  $dt$ :

$$\frac{\delta v \cdot dt}{i}$$

und die gesamte Volumänderung während der Dauer einer vollständigen Oscillation

$$\int_0^i \frac{\delta v \cdot dt}{i} = 0,$$

oder auch

$$\overline{\delta v} = \frac{1}{i} \int_0^i \delta v \, dt = 0.$$

*Wenn man also sagt, dass der Rauminhalt eines Körpers constant ist, so bedeutet das eigentlich nur, dass der Mittelwerth der Volumveränderung während einer ganzen Oscillation Null ist.*

Angenommen, dass der Körper, in Bezug auf diese Volumänderungen, als vollkommen elastisch angesehen werden könne, und dass keine unparalysirten äufseren Kräfte die Oscillationsamplitude oder ihre Dauer alteriren, so bleibt

einerseits die Dauer einer Oscillation und andererseits das Mittel des Volums für diese Dauer constant; oder:

$$i = \text{const.}$$

und

$$\bar{v} = \frac{1}{i} \int_0^i v \cdot dt = \text{const.}$$

Sagt man also, *das Volumen ist constant, so bedeutet das keineswegs, dass das Volumen keine Veränderung erleidet, sondern nur, dass der Mittelwerth des Volums unverändert bleibt.*

Ich glaube, dass die Berechtigung dieser Auffassung kaum bezweifelt werden kann.

Sobald man aber zugiebt, dass der Rauminhalt fortwährenden Veränderungen unterworfen ist, so muss auch zugegeben werden, dass der Körper gegen die auf ihn einwirkenden Kräfte fortwährend Arbeit leistet, bald positive, bald negative, wenngleich sein Volumen im gewöhnlichen Sinne constant genannt wird. Daraus folgt, dass die im Zeitelement  $dt$  geleistete Arbeit  $\frac{\delta W \cdot dt}{i}$  nicht Null ist, sondern dass bloß der Mittelwerth von  $\delta W$  während einer ganzen Oscillation gleich Null, oder:

$$\overline{\delta W} = \frac{1}{i} \int_0^i \delta W \cdot dt = 0.$$

Aber woher nimmt und wozu verwendet der Körper die Energie, welche bei dieser alternirenden Arbeitsleistung und Verbrauch im Spiele ist? Es kann damit eintheils die Energie des Körpers, und anderentheils die Energie der Außenwelt vermindert oder vermehrt werden. Sey  $+\frac{\delta Q \cdot dt}{i}$  die in der Zeit  $dt$  von Außen aufgenommene Energie,  $-\frac{\delta E \cdot dt}{i}$  die vom Körper in derselben Zeit entlehnte Energie, dann wird nach dem Prinzipie von der Erhaltung der Energie

$$\delta W = \delta Q - \delta E,$$

und (weil  $\delta W$  im Allgemeinen nicht Null) so folgt hieraus dass im Allgemeinen weder  $\delta Q$ , noch  $\delta E$  gleich Null zu seyn braucht.

Also auch die gesammte Energie des Körpers ist einer fortwährenden Veränderung, einer continuirlichen Fluctuation unterworfen, sie nimmt ab und zu, wenn auch das Volumen und die Temperatur constant angenommen wird. Sagt man also, die gesammte Energie eines Körpers sey constant, so heisst das eigentlich nur, dass der Mittelwerth während einer Oscillation:

$$\bar{E} = \text{Const.}$$

Die Gesamtenergie des Körpers besteht aus zwei Theilen: aus der lebendigen Kraft  $T$  und aus der potentiellen Energie  $U$ , so dass:

$$E = T + U.$$

Da nun  $E$  fortwährenden Änderungen unterliegt, so werden sich im Allgemeinen auch  $T$  und  $U$  beständig verändern, ihre Mittelwerthe aber für eine ganze Periode sollen einstweilen constant bleiben, also:

$$\bar{T} = \text{Const.}$$

$$\bar{U} = \text{Const.}$$

und

$$\bar{E} = \bar{T} + \bar{U}.$$

Die von Außen aufgenommene Energie  $\frac{\delta Q}{i} dt$  unterliegt ähnlichen Fluctuationen. Der Körper kann, im Falle des Wärmegleichgewichtes, während des Zeitraumes  $dt$  von Außen mehr oder weniger Wärme übernehmen, als er in derselben Zeit abgibt. Daraus ist ersichtlich, dass Prévost's Theorie des Wärmeaustausches für unendlich kleine Zeiten nicht richtig ist. Es bestehen fortwährende Fluctuationen des Energieaustausches zwischen dem Körper und der Außenwelt, trotzdem dass Volumen und Temperatur constant genannt werden; einmal übernimmt der

Körper von Außen mehr Energie, das anderemal giebt er mehr ab, so dass  $\delta Q$  im Allgemeinen von Null verschieden — nur an den Gränzen der Oscillationen gleich Null — dass aber der Mittelwerth von  $\delta Q$ , bezogen auf die Dauer einer ganzen Periode, Null ist, also:

$$\overline{\delta Q} = \frac{1}{i} \int_0^i \delta Q \cdot dt = 0.$$

Fassen wir die Resultate unserer bisherigen Betrachtungen zusammen. Man sieht jetzt leicht ein, wann der thermische Zustand des Körpers als constant betrachtet werden kann. Es ist dazu nicht im Mindesten nothwendig, dass die sogenannten Zustandsvariablen — Volumen, Temperatur, Spannung etc. — fortwährend constant bleiben. Unserer Auffassung zufolge besteht für irgend einen Körper die Bedingung für die Constanz des Zustandes darin, dass die *Periode der Volumoscillation, ferner die Mittelwerthe des Volumens, der lebendigen Kraft, der potentiellen Energie constant, und die Summe der Variationen der äusseren Arbeit und die Summe der aufgenommenen Energie, bezogen auf die Dauer einer vollständigen Oscillation, Null seyen*. Ist also der Zustand unverändert, so sind:

$$i = \text{Const.} \quad (1) \qquad \bar{v} = \text{Const.} \quad (2)$$

$$\bar{T} = \text{Const.} \quad (3) \qquad \bar{U} = \text{Const.} \quad (4)$$

$$\delta W = 0 \quad (5) \qquad \overline{\delta Q} = 0 \quad (6).$$

So lange der Zustand des Körpers sich nicht ändert, bestehen diese sechs Gleichungen und umgekehrt. Diese Bedingungsgleichungen sind aber nicht alle von einander unabhängig; möglich, dass durch die Erfüllung zweier oder dreier die übrigen *eo ipso* erfüllt sind.

Nach diesen vorläufigen Festsetzungen wollen wir nun zur analytischen Behandlung der Zustandsänderung und damit in Verbindung zur Ableitung des zweiten Hauptsatzes übergehen.

## 2.

Denken wir uns einen beliebigen Körper und wählen wir irgend einen der materiellen Punkte des Körpers. Sey  $m$  die Masse dieses Punktes, seine rechtwinkligen Coordinaten zur Zeit  $t = 0$  seyen  $x_0, y_0, z_0$ ; die Componenten seiner Geschwindigkeit  $x'_0, y'_0, z'_0$  und die Componenten seiner Beschleunigung  $x''_0, y''_0, z''_0$ , sey ferner  $v_0$  das Volumen des Körpers,  $T_0$  seine lebendige Kraft,  $U_0$  seine potentielle Energie zur selben Zeit. Würde sich der Zustand des Körpers nicht ändern, so würde die Oscillationsperiode constant bleiben, ebenso die darauf bezüglichen Mittelwerthe  $\bar{v}, \bar{T}, \bar{U}$  etc., und der Punkt  $m$  käme nach der Zeit  $i$  in eine gewisse Lage, deren Coordinaten wir mit  $x_1, \dots$ , die daselbst auftretenden Geschwindigkeitscomponenten mit  $x'_1, \dots$ , die Beschleunigungscomponenten mit  $x''_1, \dots$ , bezeichnen wollen. Nun soll sich aber der Zustand des Körpers während der Zeit  $i$  unendlich wenig verändern, der Art, daß nach ihrem Verlaufe die Oscillationsperiode nicht mehr  $i$ , sondern  $i + \delta i$  seyn möge; der Mittelwerth der lebendigen Kraft sey nicht mehr  $\bar{T}$ , sondern  $\bar{T} + \delta \bar{T}$  u. s. f. Die Summe der mitgetheilten Energie,  $\delta Q$ , welche sonst während der Zeit  $i$  Null geblieben wäre, wird jetzt im Allgemeinen von Null verschieden seyn, ebenso auch  $\delta W$ . Auch der Punkt  $m$  wird nicht in die Lage  $x_1, \dots$  gelangen, sondern an eine andere Stelle, deren Coordinaten  $x_2, \dots$ , die betreffenden Geschwindigkeitscomponenten  $x'_2, \dots$ , und die Beschleunigungscomponenten  $x''_2, \dots$  seyn mögen.

In irgend einem Augenblicke  $t$ , der zwischen 0 und  $i$  liegt, seyen die Coordinaten von  $m: x, \dots$ , die Geschwindigkeitscomponenten  $x', \dots$ , die Beschleunigungscomponenten  $x'', \dots$ ; zur selben Zeit sey die lebendige Kraft des Körpers  $T$ , seine potentielle Energie  $U$ . In der auf  $t$  folgenden unendlich kleinen Zeit  $dt$  verändert sich die Lage des Punktes um  $\frac{\partial x, dt}{i}, \dots$ , seine Geschwindigkeit

um  $\frac{\delta x' \cdot dt}{i} \dots$ ; die lebendige Kraft des Körpers um  $\frac{\delta T \cdot dt}{i}$ , seine potentielle Energie um  $\frac{\delta U \cdot dt}{i}$ . Inzwischen leistet der Körper die Arbeit  $\frac{\delta W \cdot dt}{i}$ , und übernimmt von Außen die Energie  $\frac{\delta Q \cdot dt}{i}$ . Nach dem Principe der Erhaltung der Energie ist dann

$$\delta Q = \delta T + \delta U + \delta W.$$

Da nun:

$$T = \Sigma \frac{m}{2} (x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

und

$$\delta U + \delta W = - \Sigma m (x'' \delta x + y'' \delta y + z'' \delta z)$$

(wenn nämlich diejenige Arbeit positiv gerechnet wird, welche die Kräfte dem Körper *entgegen* leisten), so wird:

$$\delta Q = \Sigma m (x' \delta x' + \dots - x'' \delta x - \dots).$$

Damit wir nun  $\overline{\delta Q}$  bilden können, multipliciren wir die Gleichung mit  $dt$  und ziehen in Betracht, dass:

$$x' dt = dx$$

$$x'' dt = dx'.$$

Dann wird:

$$\delta Q \cdot dt = \Sigma m (dx \cdot \delta x' + \dots - dx' \delta x - \dots).$$

Nun ist aber:

$$dx' \delta x = d(x' \delta x) - x' d \delta x$$

und

$$x' d \delta x = x' \delta dx = \delta (x' dx) - dx \delta x',$$

so dass:

$$\delta Q \cdot dt = - \Sigma m d (x' \delta x + \dots) + \Sigma m \delta (x' dx + \dots)$$

oder aber, indem man die Differentials- und Variationszeichen vor das Summenzeichen schreibt, indem man ferner in der letzten Summe den früheren Werth von  $dx$  restituirt, den Ausdruck der lebendigen Kraft in Betracht zieht und endlich zwischen 0 und  $i$  integriert:

$$\int_0^i \delta Q \cdot dt = \Sigma m [x' \delta x + \dots]_0^i + \delta \int_0^i 2 T \cdot dt$$

oder, wenn man die Mittelwerthe einsetzt:

$$i \cdot \delta \bar{Q} = \Sigma m [x' \delta x + y' \delta y + z' \delta z]^0 + \delta(2 \cdot i \bar{T}) \quad (1).$$

Diese Gleichung ist — wie es schon Sir William Thomson in „A Treatise on Natural Philosophy“ (I, 233) bemerkte — für jedes System unter allen Umständen gültig.

Wir wollen Gl. (1) vorerst für den Fall anwenden, daß der Zustand des Körpers (nach der neuen Auffassung) unverändert bleibt, indem dann:

$$i = \text{Const.}$$

$$\bar{T} = \text{Const.}$$

und

$$\delta \bar{Q} = 0,$$

so folgt auch:

$$\Sigma m [x' \delta x + \dots]^0 = 0,$$

oder mit Benutzung der oben festgestellten Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} \Sigma m [x'_0 \delta x_0 + y'_0 \delta y_0 + z'_0 \delta z_0] \\ = \Sigma m [x'_1 \delta x_1 + y'_1 \delta y_1 + z'_1 \delta z_1] \end{aligned} \quad (7).$$

Die Ausdrücke auf beiden Seiten dieser Gleichung sind nichts anders, als die Variationen des *Geschwindigkeitspotentials*. Bezeichnen wir dieses Potential nach Helmholtz<sup>1)</sup> mit  $\Phi$ , so kann man die Gleichung (7) auch so schreiben:

$$(\delta \Phi)_0 = (\delta \Phi)_1 \quad \dots \quad (7a);$$

d. h. wenn der Zustand des Körpers ungeändert bleibt, bleibt auch die Variation des Geschwindigkeitspotentials für die gleiche Phase der Oscillation constant.

Beziehen wir nun die Gleichung (1) auf die oben beschriebene unendlich kleine Zustandsänderung, dann wird:

$$i \cdot \delta \bar{Q} = \Sigma m (x'_0 \delta x_0 + \dots) - \Sigma m (x'_1 \delta x_1 + \dots) + \delta(2i\bar{T}),$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichung (7a)

$$i \cdot \delta \bar{Q} = (\delta \Phi)_1 - (\delta \Phi)_0 + \delta(2i\bar{T}).$$

Wir wollen nun zusehen, in wie fern  $(\delta \Phi)_1$  und  $(\delta \Phi)_0$  von einander verschieden sind.  $(\delta \Phi)_1$  ist die Variation

1) Crelle's Journal Vol. 57, S. 13.

des Geschwindigkeitspotentials, die im *alten* Zustande ( $Z$ ) während der Zeit  $i$  erfolgen würde, wenn die Geschwindigkeit dieser Variation die Zeit  $i$  hindurch dieselbe bliebe, wie sie während dem Zeitelemente  $dt$  (unmittelbar nach dem Zeitmomente  $i$ ) tatsächlich war, und  $(\delta \Phi)_1$  ist die Variation des Geschwindigkeitspotentials, die im *neuen* Zustande ( $Z + \delta Z$ ) während der Zeit  $i + \delta i$  erfolgen würde, wenn die Geschwindigkeit dieser Variation die Zeit  $i + \delta i$  hindurch dieselbe bliebe, wie sie während dem Zeitelemente  $dt + \delta dt$  (unmittelbar nach dem Zeitmomente  $i$ ) tatsächlich war; folglich ist:

$$(\delta \Phi)_2 = (\delta \Phi)_1 + \delta(\delta \Phi)_1.$$

In Folge dessen:

$$i \cdot \overline{\delta Q} = -\delta(\delta \Phi)_1 + \delta(2i \bar{T}).$$

Nun ist aber das erste Glied der rechten Seite eine unendlich kleine Gröfse zweiter Ordnung, während die übrigen Glieder der Gleichung unendlich kleine Gröfsen erster Ordnung sind, somit:

$$i \cdot \overline{\delta Q} = \delta(2i \bar{T}).$$

Da in dieser Gleichung nur Variationszeichen enthalten sind, können wir dieselben mit Differentiationszeichen vertauschen und schreiben:

$$i \cdot \overline{dQ} = \delta(2i \bar{T}) \dots \dots \quad (Ia).$$

*Definiert man die Constanz des Zustandes der Art, wie wir es gethan haben, so ist die Gleichung (Ia) für einen jeden Körper und für eine jede unendlich kleine Zustandsänderung gültig.*

Wenn der Körper eine geschlossene Reihe der Zustandsänderungen — einen sogenannten Kreisproceß — durchmacht, der Art, daß  $i$  und  $\bar{T}$  zum Schluße wieder die ursprünglichen Werthe annehmen, dann ist:

$$\int i \cdot \overline{dQ} = 0 \dots \dots \quad (IIa),$$

oder:

$$\iint dQ \cdot dt = 0,$$

wo das erste Integral sich auf eine ganze Oscillation, und das zweite auf einen vollständigen Kreisproceß bezieht.

Die Gleichung (Ia) kann aber auch noch auf eine andere Art integriert werden. Dividiren wir sie mit  $i \cdot \bar{T}$ , so wird:

$$\frac{d\bar{Q}}{\bar{T}} = 2 \cdot d \log. (i \bar{T}),$$

oder anders geschrieben:

$$\frac{\int_0^i dQ \cdot dt}{\int_0^i T dt} = 2 \cdot d \log. \left( \int_0^i T dt \right).$$

In der ersten Gestalt über einen ganzen Kreisproceß integriert, ist

$$\int \frac{d\bar{Q}}{\bar{T}} = 0 \quad \dots \quad \text{(IIb).}$$

### 3.

Vergleichen wir nun diese dynamischen Sätze mit dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie, der auf umkehrbare Kreisprocesse bezogen, so lautet:

$$\int \frac{dQ}{a+t} = 0 \quad \dots \quad \text{(II),}$$

wo  $a+t$  die vom absoluten Nullpunkt der Gase gerechnete Temperatur ausdrückt, während  $dQ$  das Differential der dem Körper zugeführten Wärme bedeutet. Unsere dynamische Gleichung (IIb) stimmt zwar mit der thermodynamischen Gleichung (II) überein, aber nur unter der Voraussetzung, daß die absolute Temperatur proportional ist mit dem Mittelwerthe der lebendigen Kraft des Körpers, bezogen auf die Dauer einer Oscillation, und daß das thermodynamische  $dQ$  mit dem dynamischen  $\bar{d}Q$  proportional ist. — Prüfen wir zuerst dieses letztere Verhäl-

on, und  
zieht.  
eine an-  
mit  $i \cdot \bar{T}$ ,  
nifs, und bezeichnen wir das thermodynamische  $\bar{d}Q$  zum  
Unterschiede mit  $d\mathfrak{D}$ , so daß:

$$d\mathfrak{D} = \alpha \bar{d}Q$$

und, da sowohl  $d\mathfrak{D}$  (Wärme) als auch  $\bar{d}Q$  Energie be-  
deutet, so ist der Proportionalitäts-Factor  $\alpha$  eine reine  
Zahl, deren Größe nur von den gewählten Einheiten ab-  
hängt. Wir wollen die Einheit der Wärme so wählen,  
daß sie mit der Einheit der Energie gleich ist, dann wird  
 $\alpha = 1$  und

$$d\mathfrak{D} = \bar{d}Q$$

oder:

$$d\mathfrak{D} = \frac{1}{i} \int_0^i dQ \cdot dt.$$

Daraus ergibt sich, daß das sogenannte Wärme-Diffe-  
rential  $d\mathfrak{D}$  nicht das Differential der Energie, sondern  
nur den Mittelwerth solcher Differentialien während einer  
vollständigen Oscillation bedeutet. — Nun kann man sich  
auch leicht Rechenschaft geben, weshalb die erste Haupt-  
gleichung der Wärmetheorie nicht unmittelbar integriert  
werden kann? deshalb, weil  $d\mathfrak{D}$  eigentlich kein Differen-  
tial ist, sondern nur eine unendlich kleine Durchschnitts-  
größe, und weil die Summe von den Durchschnittsgrößen

$$\int_{\frac{1}{i}}^i \int_0^i dQ \cdot dt$$

auch vom zeitlichen Verlaufe — mit anderen Worten, von  
der Art und Weise — der Energie-Zuführung abhängig  
ist. — Ferner war bisher die Zeitdauer ganz unbestimmt,  
während welcher die Wärmemenge  $d\mathfrak{D}$  dem Körper zu-  
geführt wurde; jetzt sieht man klar, daß sich  $d\mathfrak{D}$  auf die  
Dauer einer Oscillation bezieht und daß es jene Energie-  
menge bedeutet, welche dem Körper während einer Oscil-  
lations-Periode zuzuführen ist.

Prüfen wir nun das Verhältnis der absoluten Tempe-

ratur zur lebendigen Kraft. Sey vorläufig  $\beta$  der Proportionalitäts-Factor, so dass:

$$\bar{T} = \beta(a + t).$$

Indem die Temperatur von der Masse unabhängig ist — es kann ja eine kleine Masse dieselbe Temperatur haben wie eine grosse — während  $\bar{T}$  von der Masse abhängt, so ist am einfachsten, wenn man  $\beta$  mit der Masse des Körpers proportional setzt. Also:

$$\beta = M \cdot c,$$

wo  $M$  die Masse des Körpers und  $c$  eine reine Zahl bedeutet, die, außer den gewählten Maafseinheiten, nur von der Natur des Körpers abhängen kann. Es wird sodann:

$$a + t = \frac{\bar{T}}{M \cdot c} \quad \dots \quad (8),$$

d. h. die absolute Temperatur des Körpers ist mit dem Mittelwerthe der lebendigen Kraft im geraden, und mit der Masse im verkehrten Verhältniss. Ihre Masseneinheit ist: lebendige Kraft getheilt durch Masse, oder, was dasselbe ist, Quadrat der Längeneinheit getheilt durch Quadrat der Zeiteinheit.

Bestimmen wir noch, was die Zahl  $c$  bedeutet. Stellen wir uns vor, dass die ganze mitgetheilte Wärme nur zur Vermehrung des Mittelwerthes der lebendigen Kraft verwendet werde, dass also:

$$d\bar{Q} = d\bar{T}$$

und folglich nach Gleichung (8)

$$d\bar{Q} = Mc \cdot dt.$$

Hieraus ergiebt sich, dass  $c$  die wahre Wärmecapacität bedeutet, d. h. jene Zahl, welche angiebt, wie viel Wärme die Masseneinheit erfordert, damit die Temperatur um einen Grad erhöht werde.

Als Beispiel möge die Anwendung der Gleichung (8) auf die permanenten Gase dienen. Bei diesen ist nach den Versuchen von Joule und Thomson die specifische

Wärme bei constantem Volumen nur sehr wenig von der wahren Wärmecapacität verschieden. Ist also  $\bar{V}$  das Volumen des Körpers,  $v$  sein specifisches Volumen,  $c$  die specifische Wärme bei constantem Volumen, bezogen auf die Masseneinheit und  $\gamma$  die specifische Wärme bei constantem Volumen, bezogen auf die Volumeneinheit, so hat man

$$v = \frac{\bar{V}}{M}$$

und

$$\gamma = \frac{c}{v}.$$

daher

$$M \cdot c = \bar{V} \cdot \gamma$$

und

$$a + t = \frac{\bar{T}}{\bar{V} \cdot \gamma}.$$

Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff, atmosphärische Luft und Kohlenoxyd sind permanente Gase und ihre Moleküle enthalten dieselbe Anzahl von Atomen. Da nun aus den Versuchen von Regnault folgt, daß bei diesen  $\gamma$ , unabhängig von der Natur des Gases, sehr nahe gleich ist, somit für die genannten Gase

$$\frac{a + t}{a + t^1} = \frac{\bar{T}}{\bar{V}} \cdot \frac{\bar{V}_1}{\bar{T}_1}.$$

Sagt man also, daß die Temperatur zweier Gase — deren Moleküle dieselbe Anzahl von Atomen enthalten — gleich ist, so heißt das so viel, daß der Mittelwerth der lebendigen Kraft für die Volumeneinheit im Verlaufe einer ganzen Oscillation bei beiden Gasen gleich ist.

Nachdem wir es auf diese Weise festgesetzt haben, was die in dem zweiten Hauptsatze vorkommenden Größen dynamisch bedeuten, kehren wir zur Gleichung

$$d\bar{Q} = \frac{2d(\bar{T})}{i}$$

zurück und dividieren wir sie mit  $2\bar{T}$ , so wird

$$d \log .(i \bar{T}) = \frac{d \bar{Q}}{\frac{1}{2} \bar{T}}$$

und indem die linke Seite ein Differential ist, muß auch die rechte ein Differential seyn. Bezeichnen wir dieselbe einfach mit  $dS$ , so wird  $S$  die Hälfte der sogenannten Entropie bedeuten.

$$d \log .(i \bar{T}) = dS.$$

Integrieren wir diese Gleichung und bezeichnen die Integrationskonstante mit  $\log . C_1$ , so ist:

$$i = C_1 \cdot \frac{e^S}{\bar{T}}.$$

Wäre die Function  $S$  und die Konstante  $C_1$  bekannt, so könnte man die Oscillationsdauer aus dieser Formel berechnen. Bei den permanenten Gasen können wir  $S$  leicht bestimmen. Denn wir wissen, daß bei diesen

$$d \bar{Q} = M \cdot c_r \cdot dt + M(c_p - c_r)(a + t) \frac{dv}{v},$$

und wenn man das Verhältnis der beiden spezifischen Wärmen mit  $k$  bezeichnet

$$d \bar{Q} = d \bar{T} + (k - 1) \bar{T} \frac{dv}{v},$$

also

$$\frac{d \bar{Q}}{\frac{1}{2} \bar{T}} = dS = \frac{1}{2} d \log .(\bar{T} v^{k-1}),$$

daher ist für permanente Gase:

$$e^S = C_2 \bar{T}^{\frac{1}{2}} v^{\frac{k-1}{2}},$$

wo  $C_2$  die bei dieser Integration auftretende Konstante bezeichnet. Substituiren wir diesen Werth von  $S$  in die allgemeine Formel der Oscillationsdauer und setzen wir  $C$  an die Stelle des Productes der Constanten  $C_1$  und  $C_2$ , so wird:

$$i = C \cdot \sqrt{\frac{v^{k-1}}{\bar{T}}}.$$

Betrachten wir nun zwei Gase, deren Moleküle dieselbe Anzahl von Atomen enthalten, bei gleicher Spannung und

gleicher Temperatur. Seien  $\rho$  und  $\rho_1$  ihre Dichten unter normalen Umständen,  $i$  und  $i_1$  ihre Oscillationsperioden, dann ist:

$$i = i_1 \sqrt{\left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^{k-1}}.$$

Beziehen wir die Dichte auf den Wasserstoff als Einheit und nehmen wir die Oscillationsdauer des Wasserstoffes als Zeiteinheit, dann ist

$$\frac{\rho}{\rho_1} = d$$

und

$$i = d^{-\frac{k-1}{2}}.$$

Bei Gasen, deren Moleküle aus je zwei Atomen bestehen, ist

$$k = 1,405$$

$$\frac{k-1}{2} = 0,2025,$$

also:

$$\log . i = -0,2025 \log . d.$$

Auf Grund dieser Gleichung wurde die folgende Tabelle berechnet:

Name des Gases	Dichte	Oscillationsdauer
Hydrogen . . . . .	1	1
Oxygen . . . . .	16	0,5704
Nitrogen . . . . .	14	0,5860
Atmosphärische Luft	14,438	0,5825.

Aus dieser Tabelle ist ersichtlich, daß die dichteren Gase schneller, die weniger dichten langsamer pulsiren; die Oscillationsdauer ist für Wasserstoff fast doppelt so gross als für Sauerstoff.

Nur noch eine kurze Bemerkung! Wenn es wahr ist, wie man anzunehmen Gründe hat, daß in der Natur wegen der unvollkommenen Elasticität, Reibung, Viscosität und der Ausstrahlung der Energie etc. umkehrbare Kreisprozesse in Wirklichkeit nicht vorkommen können, daß demnach

$$\int \frac{dQ}{(a+i)}$$

immer grösser als Null ist, so muß auch

$$\int i d\bar{Q}$$

immer grösser seyn als Null; mit anderen Worten die Function

$$A = 2i\bar{T},$$

welche Maupertuis Wirkung (Action) genannt hat, ist — die Quelle der aufgenommenen Energie betreffend — am Ende einer jeden Veränderung unbedingt *kleiner*, als zu Anfang derselben. Daher kann man den hypothetischen Satz, dass die Entropie des Weltalls immer zunimmt (Claussius), auch so ausdrücken: *die Wirkung des Weltalls vermindert sich fortwährend.*

### VIII. Ueber ein Paradoxon der mechanischen Wärmetheorie; von A. Ritter in Aachen.

Denkt man sich ein Kilogramm Luft (von der absoluten Temperatur  $T_1$ , vom Drucke  $p_1$  und vom Volumen  $v_1$ ) in einem unten geschlossenen Cylinder im Gleichgewichtszustande erhalten durch einen mit Gewichten belasteten Kolben, so erkennt man: daß jede Hinzufügung von neuen Belastungen ein Sinken des Kolbens und eine Abnahme des Volumens der Luftmasse zur Folge haben wird. Durch *allmähliche* Steigerung der Belastung — wie z. B. bei Sandbelastung durch Hinzufügung eines Sandkornes nach dem anderen — würde das Volumen der Luftmasse bis auf jede beliebig kleine vorgeschriebene Größe  $v_2$  vermindert werden können (wenigstens innerhalb der Gränzen, bis zu welchen das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz noch als gültig betrachtet werden darf).

Anders verhält es sich jedoch, wenn die Belastungszunahme *plötzlich* erfolgt. In diesem Falle wird das Vo-

Volumen niemals eine Größe:  $v^2 < \frac{v_1}{3,44}$  erreichen können, wie aus der mechanischen Wärmetheorie auf folgende Weise sich ergibt.

Wenn die Kolbenfläche der Einfachheit wegen gleich 1 Quadratmeter angenommen wird, so ist bei vorhandenem Gleichgewichtszustande stets der Druck der eingeschlossenen Luft pro Quadratmeter gleich der Kolbenbelastung zu setzen. Diese Belastung hatte anfänglich die Größe  $p_1$  und wird alsdann *plötzlich* bis auf die Größe  $p_2$  vermehrt. Beim Niedersinken von der Höhe  $h_1$  bis zur Höhe  $h_2$  verrichtet das Gewicht  $p_2$  die mechanische Arbeit:

$$\mathfrak{A} = p_2 (h_1 - h_2) \quad \dots \quad (1).$$

Da die Gefäßwände als undurchlässig für Wärme vorausgesetzt werden, so ist das Wärme-Aequivalent dieser Arbeitsgröße dem hervorgebrachten Zuwachs der inneren Wärme gleich zu setzen; man erhält also die Gleichung:

$$c(T_2 - T_1) = A p_2 (h_1 - h_2) \quad \dots \quad (2),$$

in welcher:  $c = 0,1685$  die Wärmecapacität der Luft bei constantem Volumen, ferner:  $A = \frac{1}{424}$  das Wärme-Aequivalent der Arbeitseinheit, und  $T_2$  die bei nachher eingetretenem Ruhestande erreichte End-Temperatur der Luftsäule bedeutet. Diese Temperatur  $T_2$  entspricht dem Volumen:  $v_2 = h_2 \cdot 1$  und dem Drucke  $p_2$ , ist also nach dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze zu berechnen aus der Gleichung:

$$p_2 v_2 = R T_2, \text{ oder: } p_2 h_2 = 29,27 \cdot T_2 \quad \dots \quad (3),$$

und wenn man den hieraus für  $T_2$  zu entnehmenden Werth in Gleichung (2) substituiert, so nimmt dieselbe für  $p_2$  aufgelöst die folgende Form an:

$$p_2 = \frac{c R T_1}{(c + A R) h_2 - A R h_1} \quad \dots \quad (4).$$

Indem man den Nenner dieses Ausdrückes gleich Null setzt, erhält man für dasjenige Compressionsverhältniß,

welchem der Werth  $p_2 = \infty$  entsprechen würde, die Bedingungsgleichung:

$$\frac{h_1}{h_2} = 1 + \frac{c}{AR} = 1 + \frac{424 \cdot 0,1685}{29,27} = 3,44 \quad . \quad (5).$$

Hieraus folgt, daß unter den oben angenommenen Umständen der Kolben niemals bis auf eine Höhe:  $h_2 < \frac{h_1}{3,44}$  herabsinken kann — wie groß auch immer die Belastung  $p_2$  gewählt werden möge.

Als Illustration und Seitenstück zu dem vorigen kann der in Fig. 1 dargestellte Fall betrachtet werden. Diese Figur veranschaulicht den Gleichgewichtszustand eines harten schweren cylindrischen Körpers (wie z. B. eines Mühlsteines, welcher durch die rasch auf einander folgenden Stöße einer zwischen seiner horizontalen Bodenfläche und dem Erdboden mit großer Geschwindigkeit auf- und abfliegenden (vollkommen elastisch gedachten) Kugel frei im Raume schwebend erhalten wird. Wenn die Masse ( $m$ ) der Kugel sehr klein, und ihre Geschwindigkeit ( $c$ ) sehr groß angenommen wird, so ergibt sich als Bedingung des Gleichgewichtes die Gleichung<sup>1)</sup>:

$$mc^2 = Ph \dots \dots \dots \quad (6).$$

Auf gleiche Weise erhält man für den in Fig. 2 dargestellten Gleichgewichtszustand die Bedingungsgleichung

$$mv^2 = (P + Q)(h - x) \dots \dots \quad (7).$$

Betrachtet man den in Fig. 1 dargestellten Gleichgewichtszustand als den gegebenen Anfangszustand, so überzeugt man sich leicht, daß die neue Gleichgewichtslage (Fig. 2) nicht nur von der Größe der hinzugefügten Belastung  $Q$  abhängen, sondern außerdem von dem Gesetze, nach welchem die Belastung während des Sinkens von  $P$  bis  $P + Q$  zunahm; denn von diesem Gesetze wird die Größe der mechanischen Arbeit abhängen, welche die

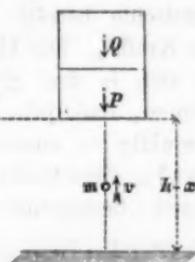
1) Vergl. Ritter's „Lehrbuch der analytischen Mechanik“ §. 76.

Schwerkraft während des Sinkens verrichtet. Es soll hier angenommen werden, daß das ganze Gewicht  $Q$  mit einem

Fig. 1.



Fig. 2.



Male hinzugefügt wurde. In diesem Falle verrichtet die Schwerkraft die mechanische Arbeit:  $(P + Q)x$ . Diese ganze mechanische Arbeit wird — sobald die schwebende Masse nach Oscillationen von abnehmender Amplitude in der neuen Gleichgewichtslage zur Ruhe gelangt ist — nunmehr in Form von lebendiger Kraft auf die oscillirende Kugel übertragen worden seyn; folglich ist:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2} = (P + Q)x \quad \dots \quad (8).$$

Durch Elimination der Größen  $c$  und  $v$  erhält man aus obigen drei Gleichungen für  $Q$  den Werth:

$$Q = \frac{3Px}{h - 3x} \quad \dots \quad (9).$$

Indem man den Nenner dieses Ausdrucks gleich Null setzt, erhält man für diejenige Senkung, zu deren Hervorbringung ein *unendlich großes* Gewicht erforderlich seyn würde, die Bedingungsgleichung:

$$\frac{x}{h} = \frac{1}{3} \text{ oder } \frac{h-x}{h} = \frac{2}{3} \quad \dots \quad (10).$$

Es wird daher auf die hier angenommene Weise niemals ein Hinabsinken des schwebenden Körpers auf eine Höhe:  $h - x < \frac{2}{3}h$  bewirkt werden können — wie groß auch immer das plötzlich hinzugefügte Uebergewicht  $Q$  gewählt werden möge.

Den Unterschied zwischen den beiden *numerischen* Resultaten in (5) und (10) kann man sich nach der mechanischen Theorie der Gase auf folgende Weise erklären.

Die lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung der Luftmoleküle beträgt: 61,5 Proc. von ihrer totalen lebendigen Kraft<sup>1)</sup>. Die Gesamtmenge der Luftmoleküle kann man sich in drei gleiche Gruppen zerlegt denken, und annehmen, daß jede Gruppe parallel zu einer von drei rechtwinklig zu einander stehenden Coordinatenachsen sich bewegt<sup>2)</sup>. Man findet alsdann, daß die in verticaler Richtung sich bewegende Gruppe eine lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung besitzt, welche  $\frac{61,5}{3} = 20,5$

Proc. von der totalen lebendigen Kraft beträgt. Wenn man also in Bezug auf den in Fig. 2 dargestellten Fall die Annahme macht, daß von der mechanischen Arbeit  $(P+Q)x$  nur 20,5 Proc. auf die Vergrößerung der lebendigen Kraft der oscillirenden Kugel verwendet würden, während der Rest eine anderweitige Verwendung fände, so würde man statt Gleichung (8) die folgende Gleichung erhalten:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2} = 0,205 \cdot (P+Q)x \quad . \quad (11),$$

und als Resultat würde auch für diesen Fall sich ergeben, daß dem Werthe  $Q = \infty$  der Werth  $\frac{h-x}{h} = \frac{1}{3,44}$  entspricht.

1) Vergleiche Clausius „Abhandlungen über die mechanische Stromtheorie“, zweite Abhandlung, S. 258.

2) Ebendaselbst S. 251.

Aachen, den 13. Februar 1877.

**IX. Untersuchungen über die Bewegungen strahlender und bestrahlter Körper;  
von F. Zöllner.**

(Schluss von S. 317 des vorigen Heftes.)

Dritte Abhandlung.

Im Anschluss an die bereits mitgetheilten Versuche erlaube ich mir im Folgenden noch einige weitere Experimente und Beobachtungen zu beschreiben, welche mir geeignet erscheinen, die Theorie der von Hrn. Crookes entdeckten radiometrischen Bewegungen zu fördern.

Neunter Versuch.

Fig. 1, Taf. VII stellt eine Modification des siebenten Versuches (S. 298) dar, welche Hr. Götze in Leipzig (Turnerstrasse 25), den ich mir für die Anfertigung sämmtlicher in diesen Abhandlungen beschriebenen Apparate zu empfehlen erlaube, selbstständig und unabhängig von meinen Angaben construirt hat.

Unter einer beweglichen Glimmerscheibe befindet sich in einem Abstande von etwa 15<sup>mm</sup> ein *bewegliches* Kreuz mit schräg gestellten Aluminium-Flügeln, die auf ihrer unteren Seite mit Glimmerblättchen beklebt sind. Sobald der Apparat dem *Lichte* ausgesetzt wird, beginnt das Kreuz in der durch die Pfeile angedeuteten Richtung sehr schnell zu rotiren, während gleichzeitig die Scheibe nach der *entgegengesetzten* Seite in lebhafte Rotation gerath. Selbstverständlich kann das bewegliche Kreuz auch durch entsprechend geschwärzte Flügel ersetzt werden.

Wird das Gefäß *unterhalb* der Ebene der Glimmerscheibe, z. B. mit der warmen Handfläche, erwärmt, so rotiren Kreuz und Scheibe nach der *entgegengesetzten* Richtung wie im Lichte. Im ersten Falle findet die Rotation unter dem Einflusse der Emission von Theilchen

der beweglichen Flügel, im zweiten Falle durch Emissionen von der Gefäßwandung statt, welche, wie beim siebenten Versuche, durch die als Schirme wirkenden Flügel des darunter befindlichen Kreuzes Bewegungs-Componenten liefern, welche die Glimmerscheibe in dem beobachteten Sinne in Rotation versetzen.

#### Zehnter Versuch.

Fig. 2, Taf. VII stellt zwei communicirende Radiometer-Gefäße dar, in denen zwei bewegliche Kreuze angebracht sind, deren Flügel aus schräg gestellten, nicht geschwärzten Glimmerblättchen bestehen. Unterhalb derselben sind ringförmig zwei Drähte befestigt, von denen der eine aus Aluminium, der andere aus Platin besteht. Die Drähte können, wie Fig. 3 zeigt, mit einem galvanischen Elemente verbunden und hierdurch erwärmt werden. Die Temperaturerhöhung des Platindrahtes lässt sich näherungsweise durch ein in fünfel Grade C. getheiltes Thermometer bestimmen, um dessen Quecksilbergefäß ein Platindraht von *derselben* Dicke wie in dem betreffenden Radiometer in einer dicht anschließenden Spirale von mehrfachen Windungen geführt ist. Das Thermometer wird dann in ein Gefäß gesetzt, in dem sich eine nicht leitende Flüssigkeit befindet, z. B. Copallack, welche die Drahtspirale umspült (Fig. 3 g).

Bei einer galvanischen Temperaturerhöhung des Drahtes von *höchstens*  $10^{\circ}$  C. wurden unter verschiedenen Druckverhältnissen des Gases im Innern der Gefäße folgende Erscheinungen beobachtet.

- 1) Bei gewöhnlichem Barometerdruck von 760<sup>mm</sup> fand eine normale Rotation statt, d. h. eine solche, wie sie durch erwärmte, vom Drahte aufsteigende Luftströme erklärt werden kann.
- 2) Bei stetiger Verminderung des Druckes trat bei ungefähr 100<sup>mm</sup> ein Wendepunkt ein, indem sich die Rotation mit abnehmender Geschwindigkeit bis zum Stillstande bei diesem Druck verlangsamte.

- 3) Bei niedrigeren Druckwerthen als 100<sup>mm</sup> stellte sich eine *anomale* Rotation nach der *entgegengesetzten* Richtung ein, d. h. eine solche, welche durch *Aufsaugung des Gases* durch die erwärmten Drähte, sowohl des Aluminium- als Platindrahtes erklärt werden könnte.
- 4) Diese anomale Rotation blieb unverändert bis zu Druckwerthen, welche barometrisch nicht mehr gemessen werden konnten, und bei welchem, wie es *schien*, ein mit der Pumpe gleichzeitig in Verbindung gesetztes gewöhnliches Radiometer, bereits den Punkt seiner größten Empfindlichkeit überschritten hatte.
- 5) Bei fortgesetzter Evacuation tritt *fast plötzlich* wieder die *normale* Rotation ein, jedoch mit einer solchen Geschwindigkeit, daß man nicht mehr die einzelnen Theile des rotirenden Kreuzes zu erkennen im Stande ist. Ich habe bei den empfindlichsten Radiometern, selbst bei der kräftigsten Bestrahlung durch die Sonne, niemals auch nur entfernt solche Rotationsgeschwindigkeiten beobachtet. Die galvanische Erwärmung des Drahtes braucht hierbei nur 2° bis 3° zu betragen. Der Eintritt der Wendepunkte scheint näherungsweise beim Platindraht und Aluminiumdraht gleichzeitig einzutreten.

*Alle diese Versuche gelingen mutatis mutandis auch dann, wenn die Drahtringe über statt unter dem beweglichen Kreuze angebracht sind.*

Wenn die Gefäße bei diesem geringen Drucke des eingeschlossenen Gases abgeschmolzen werden, so findet unter denselben Bedingungen die normale Rotation bei der *galvanischen* Erwärmung der Drähte gleichfalls statt.

Indessen beobachtet man hierbei, entsprechend der bereits früher (S. 300) gemachten Bemerkung, eine stetige Abnahme der Geschwindigkeit bei *gleicher* Erwärmung, bis nach etwa 8 bis 10 Tagen, selbst bei einer Erwärmung des Drahtes bis zum *Glühen*, Stillstand eintritt, der sich

später wieder in die *anomale* Rotation verwandelt. Meine S. 300 ausgesprochene Vermuthung, daß diese Veränderung lediglich von einer allmählichen Druckvergrößerung im Innern der Gefäße herrührt, sey es durch Verdampfung von auf der Oberfläche der innern Glaswandungen condensirten Gasschichten oder des Glases selbst, hat sich durch folgenden Versuch bestätigt.

#### Eilfter Versuch.

Wird das Instrument, nachdem es im Laufe von etwa 14 Tagen *indifferent* gegen die Erwärmung durch den galvanischen Strom geworden ist, durch *Eiswasser* abgekühlt, so findet sofort wieder die *normale* Rotation statt, entsprechend einer *Druckverminderung* der eingeschlossenen Dämpfe.

Erwärmt man dagegen das Gefäß zur Zeit des Indifferenzpunktes über der Lampe oder durch heißes Wasser, so tritt die *anomale* Rotation bei der galvanischen Erwärmung ein, entsprechend einer *Druckvergrößerung* der eingeschlossenen Dämpfe.

#### Zwölfter Versuch.

Erwärmt man die Drähte durch *Bestrahlung mit Sonnenlicht*, indem man das Instrument einfach in die Sonne stellt, so findet stets die *normale* Rotation statt, auch wenn sich der Druck im Innern der Gefäße so weit vergrößert hat, daß bei der *galvanischen* Erwärmung des Drahtes die *anomale* Rotation eintritt. Man hat es in diesem Falle nur mit einer Modification des fünften Versuches (Fig. 9, Taf. II, S. 166) zu thun, indem die unter dem beweglichen Kreuze befindliche Aluminiumscheibe durch die bestrahlten Drähte ersetzt ist, und demgemäß im letzteren Falle auch eine im Verhältniß zur Verminderung der bestrahlten Fläche langsamere Rotation eintritt.

A  
daß d  
in der  
scheibe  
Wirku  
schrieb  
die T  
Wirku  
Gases  
W  
und I  
Strom  
Ausde  
suchen  
ausdeh  
in ihm  
Für  
folgen  
stellte  
dem e  
den E  
das D  
einige  
flossen  
malen  
Abend  
angez  
Dopp  
war e  
diome  
men u  
Taf. V  
1) E  
2) S  
3) A  
3) E

Meine  
änder-  
ung  
fung  
con-  
sich  
  
etwa  
den  
abge-  
statt,  
enen  
  
ndif-  
asser,  
wär-  
ein-  
  
Son-  
onne  
wenn  
öfser-  
s die  
e nur  
g. 9,  
ichen  
hltten  
auch  
auch  
läche

Folgerungen und fernere Beobachtungen.

Aus dem zuletzt beschriebenen Versuche geht hervor, daß der galvanische Strom nicht nur durch die von ihm in den Drähten erzeugte *Erwärmung* auf die Glimmerscheibe wirkt, sondern, daß diesem Strome eine *specifische Wirkung* auf das umgebende gasförmige Medium zugeschrieben werden muß, welche entgegengesetzt der durch die Temperaturerhöhung erzeugten Wirkung ist. Diese Wirkung könnte durch eine Resorption des umgebenden Gases erklärt werden.

Wenn sich die Versuche von Edlund<sup>1)</sup>, Streintz<sup>2)</sup> und Exner<sup>3)</sup> bestätigen, so besitzt der galvanische Strom eine analoge specifische Wirkung bezüglich der *Ausdehnung* der Körper, indem nach den erwähnten Versuchen ein galvanisch durchflossener Draht sich *stärker* ausdehnen würde, als er dies nur in Folge der galvanisch in ihm entwickelten Wärme thun dürfte.

Für die Existenz solcher Absorptionsprocesse scheint mir folgende Beobachtung nicht ohne Interesse zu seyn. Ich stellte den in Fig. 2, Taf. VII dargestellten Apparat, nachdem er während einer der *normalen* Rotation entsprechenden Evacuation an der Pumpe abgeschmolzen war, zwischen das Doppelfenster meines Arbeitszimmers. Es waren bereits einige Tage seit dem Abschmelzen des Instrumentes verflossen und demgemäß bereits eine Verminderung der normalen Rotationsgeschwindigkeit eingetreten, als ich eines Abends spät in mein Zimmer kam und, bevor die Lampe angezündet war, an das Fenster trat, um die zwischen dem Doppelfenster befindlichen Radiometer zu beobachten. Es war eine helle Mondscheinnacht; während alle übrigen Radiometer, entsprechend früheren Beobachtungen, vollkommen unbeweglich waren, rotirten die in dem Apparate Fig. 2, Taf. VII befindlichen Kreuze langsam aber stetig in *ano-*

1) Edlund, Pogg. Ann. Bd. CXLIX, S. 99. 1873.

2) Streintz, Wiener Berichte Bd. LXVII, [2.] 1873 (April). — Pogg. Ann. Bd. CL, S. 368. 1873.

3) Exner, Wiener Ber. Mai 1875.

maler Richtung. Diese anomale Rotation habe ich seitdem des Nachts auch *ohne* Mondschein während eines Zeitraumes von vier Wochen beobachtet, und verschiedenen meiner Freunde gezeigt. Auch des Tages bei dicht bedecktem Himmel fand diese Rotation statt, während bei hellerer Beleuchtung ein Stillstand eintrat, der sich bei Bestrahlung durch die *Sonne* in eine normale Rotation verwandelte. Diese Eigenschaft hat sich jedoch nach und nach verloren und findet gegenwärtig nicht mehr statt.

Eines merkwürdigen Umstandes bei dieser Beobachtung sey noch in Kürze gedacht. Ich vermutthe, daß diese Erscheinung mit einer Ausstrahlung gegen den Himmelsraum in Zusammenhang stehe und öffnete daher zur Vergrößerung dieser Ausstrahlung das *äussere* Fenster, während das innere wieder geschlossen wurde. Die eintretende Wirkung war die entgegengesetzte von der erwarteten; die Bewegung hörte nach Verlauf einer halben Minute *vollständig* auf. Sobald ich das äussere Doppelfenster aber wieder schloß, stellte sich auch sofort wieder die *anomale* Rotation ein. Diesen Versuch habe ich *sehr oft* mit immer gleichem Erfolge wiederholt und verschiedenen meiner Freunde und Collegen, z. B. Fechner, W. Weber u. A. gezeigt.

#### Dreizehnter Versuch.

Hr. Dr. Geissler in Bonn hat auf der letzten Naturforscherversammlung in Hamburg einen Versuch mittheilt, den ich in der Fig. 4, Taf. VII dargestellten Form wiederholt habe. In dem Gefäß *a* befindet sich Luft von etwa 1<sup>mm</sup> Spatmung. In gewöhnlicher Weise ist ein mit *ungeschwärzten* Glimmerblättchen versehenes bewegliches Kreuz angebracht, dessen Flügel senkrecht zur Rotationsebene stehen. Wird nun durch dieses Gefäß der *Inductionsstrom* eines kleinen Röhmkorff'schen Apparates geleitet, so rotirt das Kreuz stets in soleher Richtung, wie sie einer Emission von materiellen Theilchen von der positiven Elektrode entspricht (Fig. 4*b*, Taf. VII). Wird

itdem  
Zeit-  
denen  
t be-  
d bei  
h bei  
tation  
h und  
t.  
eitung  
diese  
nsmels-  
r Ver-  
wäh-  
etende  
rteteff;  
Minute  
r aber  
nomale  
immer  
meiner  
u. A.  
  
Natur-  
mitge-  
Form  
Luft  
ist ein  
beweg-  
cht zur  
als der  
parates  
eitung,  
on der  
Wird

der Strom umgekehrt, so findet auch ein Wechsel der Rotationsrichtung statt. Dieser Versuch ist für die Emissionstheorie deswegen von Interesse, weil durch denselben in einem speciellen Falle direct der Beweis geliefert wird, daß die fraglichen Rotationen unter dem Einfluß von Emissionsprozessen stattfinden können. Nimmt man bei den radiometrischen Bewegungen an, daß auch nur ein Theil der emittirten Theilchen aus *elektrischen* Theilchen bestehe, so würde hierdurch auch, bezüglich der Bedingung für das Zustandekommen solcher Emissionen, in dem Vorhandenseyn eines bis zu einem gewissen Grade mit Gas erfüllten Raumes, eine weitere Analogie gegeben seyn, obschon der Dichtigkeitsgrad des verdünnten Gases, bei welchem das Maximum der Effecte stattfindet, in beiden Fällen ein verschiedener ist. Die von Muncke, P. Delsaulx u. A. beobachteten schwachen elektrischen Ladungen der Flügel und Gefäße der Radiometer würden außerdem zu Gunsten einer solchen Anschauung sprechen.

#### Vierzehnter Versuch.

Hr. A. Kundt hat in diesen Annalen (1876, Juliheft No. 8, S. 570 und 660) einen interessanten Versuch beschrieben, durch welchen die Reibung der geringen Gasmenge, welche sich in den radiometrischen Gefäßen befindet, zur Anschauung gebracht wird. Zwei unabhängig von einander bewegliche Glimmerscheiben „sind etwa 2 bis 3<sup>mm</sup> von einander entfernt“ in einem solchen Gefäße angebracht. Wird die eine dieser Scheiben in Rotation versetzt, so gerath allmählig auch die andere in gleichem Sinne in Bewegung. Hr Kundt hat die untere Scheibe mit Flügeln eines Crookes'schen Radiometers versehen und alsdann den Apparat „einer energischen Strahlung ausgesetzt“.

Hierbei bemerkt Kundt:

„Ich habe mich lange bemüht in einem geschlossenen evakuirten Raum eine kleine Scheibe durch magnetische Kräfte von Außen oder durch einen kleinen

in den Raum gebrachten Elektromotor in Rotation zu versetzen. Ich kam indessen zu keinem befriedigenden Resultate. Schliefslich habe ich die von Crookes aufgefundene Bewegung, in welche leicht drehbare Körper in einem sehr gut exantirten Raum durch Bestrahlung versetzt werden, als Triebkraft für die untere Scheibe benutzt<sup>1)</sup>.

Da es mir vom Standpunkte der Emissionshypothese von Wichtigkeit erschien, die Existenz dieser Reibungsprocesse auch in einem nicht „energisch“ bestrahlten Gefäſſe zu constatiren, war ich genöthigt magnetische und elektromagnetische Kräfte als Triebkräfte für die untere Scheibe zu benutzen. Es ist mir das auch vollkommen durch den in Fig. 5, Taf. VII dargestellten Apparat gelungen, dessen Einrichtung unmittelbar aus der Figur verständlich ist. Die Glimmerscheibe setzte sich selbst bei einer Entfernung von mehr als 7<sup>mm</sup> von der unteren in ziemlich lebhafte Rotation, wenn der Apparat durch den galvanischen Strom eines kleinen Elementes in Thätigkeit versetzt wurde. Ein eingeschalteter Commutator gestattete jeder Zeit die Rotationsrichtung umzukehren, und nach kurzer Zeit auch die entsprechende Umkehrung an der oberen Scheibe zu beobachten.

## X. Zum Zusammenhang zwischen Absorption und Dispersion; von E. Ketteler.

In einem anderswo publicirten Aufsatze: „Versuch einer Theorie der (anomalen) Dispersion des Lichts in einfach und doppelt brechenden Mitteln“<sup>1)</sup> habe ich eine Anzahl

1) Verhandl. des naturhist. Vereins für Rheinland-Westphalen. Jahrg. 33. 4. Folge, Bd. 2, S. 197. — Carl's Repertorium Bd. 12, S. 322. — Phil. Magazine Nov.- und Dec.-Heft 1876.

Beziehungen entwickelt, die ich nunmehr zum Theil vereinfachen, an der Erfahrung prüfen und an einem bestimmten Beispiel erläutern möchte. Auf die leitenden Grundsätze werde ich in einer weiteren Abhandlung zurückkommen.

Die für isotrope Mittel aufgestellten Bewegungsgleichungen der Aether- und Körpertheilchen waren folgende:

$$m A \frac{d^2 \varrho}{dt^2} + \Sigma m' A' \frac{d^2 \varrho'}{dt^2} = e A \left( \frac{d^2 \varrho}{dz^2} + \frac{d^2 \varrho}{dx^2} \right) \dots \quad (I)$$

$$A \left\{ \varepsilon \left( \frac{d^2 \varrho}{dz^2} + \frac{d^2 \varrho}{dx^2} \right) + z \varrho \right\} = A' \left\{ \varepsilon' \left( \frac{d^2 \varrho'}{dz^2} + \frac{d^2 \varrho'}{dx^2} \right) + z' \varrho' \right\} \quad (II).$$

Hier bedeuten  $m$ ,  $m'$  die Aether- und Körpermassen der Volumeinheit,  $\varrho$ ,  $\varrho'$  die Ausschläge und  $A$ ,  $A'$  die (den unendlich kleinen Wegstrecken  $dA$ ,  $dA'$  proportionalen) Amplituden derselben;  $e$  sowie  $\varepsilon$ ,  $z$ ;  $\varepsilon'$ ,  $z'$  sind Constanten. Dabei soll die Z-Axe des Coordinatensystems mit dem Einfallsloch und die XZ-Ebene mit der Einfallsebene zusammenfallen. Das Summenzeichen endlich bezieht sich auf die einzelnen in der Volumeinheit enthaltenen optisch-chemisch einfachen Molecularqualitäten.

Den entstehenden Differentialgleichungen entsprechen bedingungsweise die Integralausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} \varrho &= A e^{-\frac{2\pi}{\lambda} q z} \cos \left\{ \frac{2\pi}{T} \left( t - \theta + \frac{zp + x \sin e}{v} \right) \right\} \\ \varrho' &= A' e^{-\frac{2\pi}{\lambda} q z} \cos \left\{ \frac{2\pi}{T} \left( t - \theta + \frac{zp + x \sin e}{v} \right) + A' \right\} \end{aligned} \right\} \quad (III),$$

unter  $q$  den Absorptionscoefficienten und unter  $A$  den Phasenunterschied zwischen Aether- und Körpertheilchen verstanden. Es bedeuten ferner  $T$  die Schwingungsdauer,  $v$  die Lichtgeschwindigkeit im Weltäther,  $e$  den Einfalls- und entsprechend  $r$  den Brechungswinkel und  $\nu$  das Brechungsverhältnis. Man hat dann:

$$p = v \cos r, \quad \sin e = v \sin r, \quad p^2 + \sin^2 e = v^2.$$

Das Einsetzen der Ausdrücke III in I und II liefert endlich als Bedingungsgleichungen:

$$\nu^2 - q^2 - 1 = \frac{\Sigma m' A'^2 \cos \vartheta}{m A^2}, \quad 2pq = \frac{\Sigma m' A'^2 \sin \vartheta}{m A^2}. \quad (\text{IV})$$

$$\left. \begin{aligned} A'^2 [\varepsilon(\nu^2 - q^2) - z\lambda^2] &= \\ A'^2 \{[\varepsilon'(\nu^2 - q^2) - z'\lambda^2] \cos \vartheta - \varepsilon' 2pq \sin \vartheta\}, \\ A'^2 \varepsilon 2pq &= \\ A'^2 \{[\varepsilon'(\nu^2 - q^2) - z'\lambda^2] \sin \vartheta + \varepsilon' 2pq \cos \vartheta\}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{V})$$

Die hier aufgeführten Beziehungen I — V enthalten meines Erachtens die vollständige Lösung des allgemeinen dioptischen Problems. Sie geben nämlich nicht bloß die Abhängigkeit des Absorptionscoefficienten und Brechungsverhältnisses von Einfallswinkel und Wellenlänge, sondern erlauben auch, das zugehörige Amplitudenverhältniss der Körper- und Aethertheilchen sowie den Gangunterschied zwischen beiden in jedem einzelnen Falle zu berechnen.

Was zunächst den Zusammenhang zwischen den Grössen  $q$ ,  $\nu$  und  $e$  betrifft, so hat man, sofern die rechte Seite der Gleichungen IV als für das bezügliche Mittel charakteristisch vom Einfallswinkel unabhängig ist:

$$p^2 + q^2 + \sin^2 e = \nu^2 - q^2 = a^2 - b^2, \quad pq = ab, \quad (1)$$

wenn nämlich die für  $e = 0$  geltenden Specialwerthe ( $\nu_0, q_0$ ) eingeführt und  $\nu_0 = a, q_0 = b$  gesetzt werden. Aus beiden Beziehungen leitet man ab:

$$\left. \begin{aligned} 2\nu^2 &= a^2 - b^2 + \sin^2 e + \sqrt{(a^2 - b^2 - \sin^2 e) + 4a^2 b^2} \\ q &= \frac{ab}{\nu \cos r} = \frac{ab}{\sqrt{\nu^2 - \sin^2 e}} \end{aligned} \right\} \quad (2).$$

Und da  $\frac{z}{\cos r}$  gleich der Dicke  $d$  der durchlaufenen absorbirenden Schicht ist, so schreibt sich der Absorptionsfactor der Ausdrücke III auch so:

$$e^{-\frac{2\pi}{\lambda} d \frac{ab}{\nu}} = e^{-2\pi \frac{d}{\lambda} q'}$$

Die durch Gleichungen (1) und (2) ausgesprochenen, schon von Beer gesuchten Beziehungen sind die einzigen, welche mit den Cauchy'schen Intensitätsformeln für die Metallreflexion absolut verträglich sind<sup>1)</sup>.

1) Verh. d. naturhist. Vereins, Jahrg. 32, 4. Folge, 2. Bd., S. 72. (1875.) Ich behalte mir vor, darauf zurückzukommen.

(IV)

(V)

thalten  
meinen  
oß die  
chungs-  
sondern  
iß der  
erschied  
en.

Größen  
e Seite  
charak-

, (1)  
( $\nu_0, q_0$ )  
us bei-

{ (2).

absor-  
ptions-

, schon  
welche  
Metallre-

. (1875.)

Die Abhängigkeit ferner zwischen Absorption, Brechung und Wellenlänge erhält man mittelst Combinationen der Gleichungen IV und V.

Was zunächst den einfachen Fall betrifft, daß nämlich  $q = b = A = 0$  ist, so geben die beiden ersteren derselben, wenn zugleich  $n$  statt  $\nu = a$  geschrieben wird:

$$n^2 - 1 = \sum \frac{m'}{m} \frac{x \lambda^2 - \epsilon n^2}{x' \lambda^2 - \epsilon' n^2},$$

oder auch bei Einführung der inneren Wellenlänge  $l = \frac{\lambda}{n}$ :

$$n^2 - n_0^2 = \sum \frac{D'}{L^2 - 1} \quad \dots \quad (3),$$

wofür noch zur Abkürzung die drei neuen Constanten  $D'$ ,  $L$ ,  $n_0$  und außerdem  $n_0$  durch die Beziehungen:

$$n_0^2 - 1 = \sum \frac{m' x}{m x'}, \quad n_0^2 - 1 = \sum \frac{m' \epsilon}{m \epsilon'}$$

$$D' = \frac{m'}{m} \left( \frac{x}{x'} - \frac{\epsilon}{\epsilon'} \right), \quad \frac{x'}{x} = L^2$$

definiert werden. Die beiden Indices  $n_0$ ,  $n_0$  entsprechen so einer unendlich großen, resp. unendlich kleinen Wellenlänge ( $\lambda = l = \infty, = 0$ ).  $D'$  ist der Erfahrung zufolge stets positiv.

Dabei bleibt zu beachten, daß, wenn die einzelnen  $L$  nicht sprungweise, sondern continuirlich auf einander folgen und sonach auch eine stetig verlaufende Function  $D' = \varphi(L^2)$  bedingen, die Summenzeichen durch Integralzeichen ersetzt werden müssen.

Um hiernach die Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Schwingungsdauer  $T$  oder äußeren Wellenlänge  $\lambda$  zu erhalten, hat man Gleichung (3) nach  $n$  aufzulösen. Von den verschiedenen Wurzeln derselben genügt Eine der Form der wahren Dispersionscurve  $n = f(\lambda)$ .

Um von dem Verlaufe derselben eine Vorstellung zu erhalten, möge vorläufig das dispergirende Mittel aus Molekülen einer einzigen Art bestehen. Es fällt alsdann das Summenzeichen fort und schreibt sich:

$$D' = n_s^2 - n_o^2 = D n_o^2 \\ (n^2 - n_s^2)(l^2 - l_s^2) = D n_s^2 l_s^2 \dots \quad (3b)$$

Setzt man schliesslich  $\lambda_s = n_s l_s = n_o L$ , so kommt nach Ausführung der angegedeuteten Rechnung:

$$n^2 - 1 = n_s^2 - 1 - \frac{n_s^2}{2} \left( 1 + D - \frac{\lambda^2}{\lambda_s^2} \right) \quad (4) \\ \pm n_s^2 \sqrt{\frac{1}{4} \left( 1 + D - \frac{\lambda^2}{\lambda_s^2} \right)^2 - D}$$

oder auch:

$$n^2 = \frac{1}{2} n_s^2 \left( 1 - D + \frac{\lambda^2}{\lambda_s^2} \right) \pm n_s^2 \sqrt{\frac{1}{4} \left( 1 - D + \frac{\lambda^2}{\lambda_s^2} \right)^2 - \frac{\lambda^2}{\lambda_s^2}} \quad (4b)$$

Nach ihnen lässt sich für ein gegebenes  $\lambda$  das zugehörige  $n$  berechnen, folglich die Curve  $n = f(\lambda)$  construiren, und da dieselbe zwischen zwei Gränzpunkten  $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}'$ , die charakterisiert seyen durch  $\lambda'_s, l'_s, n'_s; \lambda''_s, l''_s, n''_s$ , und für welche:

$$\frac{n_s^2}{n_s^2} = \frac{l_s^2}{l_s^2} = \frac{\lambda_s}{\lambda_s} = 1 \pm \sqrt{D}, \dots \quad (5)$$

vermöge des imaginär werdenden Radicanden der Gleichungen (4) eine Discontinuität zeigt, so kommen zunächst nur die reellen Werthe von  $n$  als physikalisch bestimmbare Brechungsverhältnisse in Betracht. Mit diesen sind aber, da für das betreffende Strahlungsgebiet keine Absorption statt hat, die dioptrischen Verhältnisse des Mittels völlig gegeben.

Haben dagegen  $q, b$ , folglich auch  $A$  von Null verschiedene Werthe, findet folglich Absorption und Phasenverschiebung zwischen Körper- und Aethertheilchen statt, so erhält man aus den Gleichungen IV und V die allgemeinen Beziehungen:

$$a^2 - b^2 - \Sigma \left\{ \frac{m'_e}{m e} - \frac{\left( a^2 - b^2 - \frac{\lambda^2}{L^2} \right) D' \frac{\lambda^2}{L^2}}{\left( a^2 - b^2 - \frac{\lambda^2}{L^2} \right)^2 + 4 a^2 b^2} \right\} = 1 \quad (6) \\ \Sigma \frac{D' \frac{\lambda^2}{L^2}}{\left( a^2 - b^2 - \frac{\lambda^2}{L^2} \right)^2 + 4 a^2 b^2} = 1$$

Und wenn wieder für ein dioptrisch einfaches Mittel die Summenzeichen fortgelassen werden, so lassen sich  $a$  und  $b$  leicht *explicite* entwickeln, und man erhält:

$$\left. \begin{aligned} a^2 - b^2 - 1 &= n_s^2 - 1 - \frac{n_s^2}{2} \left( 1 + D - \frac{\lambda^2}{\lambda_m^2} \right) \\ 2ab &= n_s^2 \sqrt{D - \frac{1}{4} \left( 1 + D - \frac{\lambda^2}{\lambda_m^2} \right)^2} \end{aligned} \right\}, \quad (7)$$

folglich durch Vergleichung mit (4):

$$\begin{aligned} n^2 &= a^2 - b^2 \pm 2ab \sqrt{-1} \\ n &= a \pm b \sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Setzt man dann rückwärts diesen Ausdruck in die allgemeine Gleichung (3) ein und trennt darin die reellen und die imaginären Glieder, so werden die entstehenden Gleichungen identisch mit (6).

Nach obiger Definition ist aber  $a$  das physikalische Brechungsverhältnis ( $\nu_0$ ) und  $b$  der physikalische Absorptionscoefficient ( $q_0$ ) für senkrechte Incidenz, und so erscheint denn  $n$  für dasjenige Strahlungsgebiet, für welches die reelle Curve derselben einen unstetigen Sprung macht, nur mehr als eine lediglich mathematische (complex) Gröfse, die erst durch Vorstehendes ihre physikalische Deutung gefunden. Zugleich legt sich in die complexe Zone und zwar zur Verbindung der Gränzpunkte  $\mathfrak{G}'$ ,  $\mathfrak{G}''$  derselben die Curve  $\nu$  der Gleichungen (2), sofern nämlich für diese wegen  $q_0 = b_0 = 0$   $n_0 = \nu_0 = a_0$  wird.

Es ergänzen sich sonach für ein einfaches Mittel die Abscissen  $\lambda$  der beiden vereinigten Curven (2) und (4) zum vollen Umfang der Aetherstrahlung und diese Curven selbst zur vollen Dispersionscurve. Diese letztere besteht folglich aus zwei festen, vom Einfallswinkel unabhängigen getrennten Zweigen, die durch ein davon abhängiges bewegliches Curvenstück mit einander verbunden sind.

Endlich erhält man für das zugehörige Amplitüdenverhältnis und den Phasenunterschied von Körper- und Aethertheilchen mittelst Gleichungen IV:

$$\tan \alpha = \frac{2ab}{a^2 - b^2 - 1} \quad \dots \quad (8)$$

$$\frac{m' A'^2}{m A^2} = \sqrt{a^2 - b^2 - 1)^2 + 4a^2b^2}$$

Da  $q$  und  $b$  in den Ausdrücken III stets positiv zu nehmen sind, so wird auch  $\alpha$  positiv, d. h. die Körpertheilchen eilen den Aethertheilchen in ihren Schwingungen stets voraus.

2. Ist hiermit die Lichtbewegung im Innern eines optisch-chemischen Mittels völlig bestimmt, so lassen sich doch die erhaltenen Beziehungen noch grossenteils vereinfachen und in eine mehr übersichtliche Form bringen.

Es genügt zu dem Ende, aus den beiden Gleichungen (4) die Wurzel zu ziehen und statt  $D$  die Attribute der Gränzstrahlen in dieselben einzuführen. So kommt zunächst:

$$\frac{n^2 - n_s^2}{n_s^2} = \frac{1}{4} \left( \sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda_m^2} - (1 - V D)^2} - \sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda_m^2} - (1 + V D)^2} \right)^2$$

$$\frac{n}{n_s} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_m}\right)^2 - D} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_m}\right)^2 - D} \right).$$

Und wenn in (5) dem dem Coordinatenanfangspunkt näheren Gränzpunkt  $\mathfrak{G}'$  die kleineren, dem entfernteren  $\mathfrak{G}''$  die grösseren Bestimmungsstücke beigelegt<sup>1)</sup> und unter diesen aus einleuchtenden Gründen die äusseren Wellenlängen bevorzugt werden, so erhält man:

$$\frac{n^2 - n_s^2}{n_s^2} = \frac{1}{4\lambda_m^2} \left( V\lambda^2 - \lambda_s'^2 - V\lambda^2 - \lambda_s''^2 \right)^2 \quad \left. \right\} (9)$$

$$\frac{n}{n_s} = \frac{1}{2\lambda_m} \left( V(\lambda + \lambda_s')(\lambda + \lambda_s'') \pm V(\lambda - \lambda_s)(\lambda - \lambda_s'') \right) \quad \left. \right\}$$

Hierin sind die Wurzeln an sich positiv zu nehmen, und was das Vorzeichen der beiden letzteren betrifft, so bestimmt sich dasselbe dadurch, dass die Indices weder unendlich gross noch unendlich klein werden können und für  $\lambda = 0, = \infty$  mit den gegebenen Werthen  $n_0, n_\infty$  zu-

1) Meine bisherige Schreibweise war die umgekehrte, sofern die Bedeutung des letzteren ( $\mathfrak{G}''$ ) früher erkannt wurde als die des ersten ( $\mathfrak{G}'$ ).

(8)

sammenfallen. Dieses Vorzeichen ist daher in Gl. (9a) stets negativ, in Gl. (9b) dagegen ist es positiv für die Strecke von  $\lambda = 0$  bis  $\lambda = \lambda'$ , und negativ für die Strecke von  $\lambda = \lambda''$ , bis  $\lambda = \infty$ .

Analoge Ausdrücke findet man für  $(n^2 - n_0^2)$  und für  $(n : n_0)$ .

Will man in ähnlicher Weise, wie das Brechungsverhältnis, auch die innere Wellenlänge ( $l$ ) als Function der äußeren ( $\lambda$ ) darstellen, so erhält man wegen der Symmetrie der Gl. (3b) sowie in Anbetracht des Umstandes, daß die betreffende Curve im Gegensatz zu der der Gl. (9b) die Werthe 0 und  $\infty$  mit umfaßt, ohne Weiteres die Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{l^2 - l_m^2}{l_m^2} &= \frac{1}{4\lambda_m^2} \left( V\lambda^2 - \lambda'^2 + V\lambda^2 - \lambda''^2 \right)^2 \\ \frac{l}{l_m} &= \left( V(\lambda + \lambda')(\lambda + \lambda'') \mp V(\lambda - \lambda')(\lambda - \lambda'') \right) \end{aligned} \right\} \quad (10).$$

Auch sie lassen sich in mannigfacher Weise wieder zur Umformung der Ausdrücke für  $n$  verwenden. Ich begnüge mich mit Anführung der folgenden. Durch Division der Gleichungen (9b) und (10b) durch  $v$  lassen sich dieselben auf die Form bringen:

$$\left. \begin{aligned} n &= \sqrt{\frac{2n_s}{V\left(1 + \frac{\lambda'}{\lambda}\right)\left(1 + \frac{\lambda''}{\lambda}\right) \pm V\left(1 - \frac{\lambda'}{\lambda}\right)\left(1 - \frac{\lambda''}{\lambda}\right)}} \\ l &= \sqrt{\frac{2l_m}{V\left(1 + \frac{\lambda'}{\lambda}\right)\left(1 + \frac{\lambda''}{\lambda}\right) \pm V\left(1 - \frac{\lambda'}{\lambda}\right)\left(1 - \frac{\lambda''}{\lambda}\right)}} \end{aligned} \right\} \quad (11).$$

Die erste derselben wird, wenn  $\lambda' = 0$  genommen, also der Gränzpunkt  $\mathfrak{G}'$  mit dem Coordinatenanfangspunkt zusammenfällt, mit der bekannten Christoffel'schen Formel<sup>1)</sup> identisch; die Bedeutung des doppelten Vorzeichens blieb freilich bisher dunkel.

Im Folgenden beschränke ich mich wieder auf die Beleuchtung des Verlaufes der Dispersionscurve. Die Gleichungen (9) liefern für das Intervall von  $\lambda = \lambda'$ , bis  $\lambda = \lambda''$ , komplexe Brechungsverhältnisse, zum Zeichen, daß hier,

1) Diese Ann. Bd. 117, S. 27.

wie wir gesehen, die Schwingungen der Aether- und Körpertheilchen nicht mehr den gewöhnlichen Gesetzen gehorchen. Und gehen wir demnach zu den Ausdrücken (7) zurück, so schreiben sich dieselben nach Identificirung mit den entsprechenden Werthen der entwickelten Gl. (9a) nunmehr auch so:

$$a^2 - b^2 - 1 = n_s^2 - 1 + \frac{n_s^2}{2\lambda_m^2} [\lambda^2 - \frac{1}{2}(\lambda_s'^2 + \lambda_s''^2)]$$

$$2ab = \frac{n_s^2}{2\lambda_m^2} V(\lambda_s''^2 - \lambda^2)(\lambda^2 - \lambda_s'^2),$$

und daraus folgt:

$$a^2 + b^2 = n_s^2 \frac{\lambda}{\lambda_m}.$$

Man erhält demgemäß für den Phasenunterschied  $\vartheta$  den, wie gezeigt, positiv zu nehmenden Ausdruck:

$$\tang \vartheta = \frac{\frac{n_s^2}{\lambda_m^2} V(\lambda_s''^2 - \lambda^2)(\lambda^2 - \lambda_s'^2)}{n_s^2 - 1 + \frac{n_s^2}{2\lambda_m^2} [\lambda^2 - \frac{1}{2}(\lambda_s'^2 + \lambda_s''^2)]} \quad . \quad (12).$$

Der Nenner desselben vereinfacht sich wesentlich für diejenigen drei Punkte, die charakterisiert sind durch die Wellenlängen:

$$\begin{aligned} \lambda_2^2 &= \frac{1}{2}(\lambda_s'^2 + \lambda_s''^2) \\ \lambda_1^2 &= \lambda_s' \lambda_s'' \\ \lambda_m &= \frac{1}{2}(\lambda_s' + \lambda_s''), \quad \lambda^2 = \frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \end{aligned} \quad . \quad (13).$$

Für  $\lambda_2$  erreicht zugleich der Zähler  $ab$ , für  $\lambda_m$  der Absorptionscoefficient  $b$  seinen Maximalwerth, und bei  $\lambda_1$  liegt das Maximum von  $\vartheta$ .

Führt man die Rechnung aus, so erhält man:

$$\tang \vartheta_1 = \frac{n_0}{n_s} \frac{n_s^2 - n_s'^2}{n_s^2 - 1}$$

$$\tang \vartheta_m = \frac{\frac{1}{2}V(n_s''^2 - n_s'^2)^2 - (n_s^2 - n_0^2)^2}{\frac{1}{2}(n_s^2 + n_0^2) - 1} = \frac{Vn_s^4 - [\frac{1}{2}(n_0^2 + n_s^2)]^2}{\frac{1}{2}(n_s^2 + n_0^2) - 1}$$

$$\tang \vartheta_2 = \frac{n_s^2 - n_s'^2}{n_s^2 - 1}.$$

Dem Phasenunterschied ordnet sich dann vermöge Gl. (8) das Verhältniß der maximalen lebendigen Kräfte zu:

$$\frac{m' A'^2}{m A^2} = \sqrt{(n_s^2 - 1) \frac{\lambda^2}{L^2} - (n_o^2 - 1)}, \quad (14)$$

und dieses erlangt für die drei obigen Wellenlängen die Specialwerthe:

$$\left( \frac{m' A'^2}{m A^2} \right)_1 = \sqrt{(n_o^2 - 1)(n_e^2 - 1) + (n_s^2 - n_o^2)}$$

$$\left( \frac{m' A'^2}{m A^2} \right)_n = \sqrt{n_e^2 - 1)^2 + (n_s^2 - n_o^2)}$$

$$\left( \frac{m' A'^2}{m A^2} \right)_s = \sqrt{n_s^2 - 1)^2 + n_s^2(n_s^2 - n_o^2)}.$$

Endlich lässt sich noch der Ausdruck (2) für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $v$  auf die mehr durchsichtige Form bringen:

$$2 v^2 = \frac{1}{2} \left( n_o^2 + \frac{1}{L^2} \right) + \sin^2 e \\ + \sqrt{(n_s^2 - \sin^2 e) \frac{\lambda^2}{L^2} - (n_o^2 - \sin^2 e) \sin^2 e},$$

und so erscheint denn auch der Absorptionscoefficient:

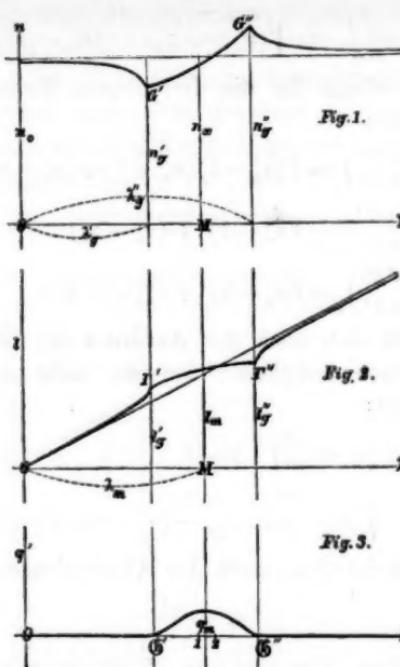
$$q' = \frac{ab}{v}$$

als unmittelbare Function der Wellenlänge  $\lambda$ . Für die Incidenz 0 insbesondere hat man zufolge Gl. (9 b):

$$v_0 = a = \frac{n_s}{2 \lambda_m} \sqrt{(\lambda + \lambda'_s)(\lambda + \lambda''_s)} \quad | \\ q_0 = b = \frac{n_s}{2 \lambda_m} \sqrt{(\lambda''_s - \lambda)(\lambda - \lambda'_s)} \quad | \quad \dots \quad (15).$$

Hiernach ergiebt sich bei bestimmter Incidenz für das wirkliche Brechungsverhältnis und die wirkliche innere Wellenlänge, sowie für den Absorptionsecoefficienten  $q'$  ein solcher Verlauf, wie ihn die Figg. 1, 2, 3 darstellen sollen<sup>1)</sup>, und wie er anscheinend auch der Erfahrung entspricht (vergl. u.). Will man indefs vom Einfallswinkel

1) Die Asymptote der Fig. 2 erhält man mittelst der Erwägung, dass die trigonometrische Tangente des Asymptotenwinkels gleich wird dem Gränzwerte von  $\frac{l}{\lambda}$  für eine unendlich grosse Abscisse, also gleich  $\frac{1}{n_s} = \frac{l_s}{\lambda_m}$ .



unabhängig seyn, so hat man die dritte und erste durch die völlig festen Curven der  $A$  und  $\frac{m' A'^2}{m A^2}$  (oder auch  $\sqrt{1 + \frac{m' A'^2}{m A^2}}$ ) zu ersetzen.

Für den Fall schließlich, daß  $\lambda'$ , und  $\lambda''$ , so nahe beisammen liegen, daß schon das Quadrat von  $b$  vernachlässigt werden kann, vereinfachen sich die obigen Formeln für das Innere des Absorptionsstreifens noch beträchtlich.

Da alsdann  $\lambda_1$ ,  $\lambda_m$ ,  $\lambda_2$  zusammenfallen, so schreibt sich:

$$\tan A = \frac{1}{2} \frac{n_s^2}{n_s^2 - 1} \frac{1}{\lambda_m^2} \sqrt{(\lambda'^2 - \lambda^2)(\lambda^2 - \lambda''^2)}$$

oder auch:

$$\tan A = \pm \frac{n_s^2 - n_g^2}{n_s^2 - 1} \sqrt{\frac{\lambda_g - \lambda}{\lambda_g - \lambda_m}},$$

wo zu jeder Seite der Mittellinie die Attribute des bezüglichen Gränzpunktes  $G$  einzusetzen sind.

Das Verhältnis der maximalen lebendigen Kräfte ferner darf gleich  $a^2 - 1$  oder auch gleich  $a^2 + b^2 - 1$  gesetzt werden und ergibt sich so zu:

$$\frac{m' A'^2}{mA^2} = n_s^2 \frac{\lambda}{\lambda_m} - 1,$$

so dass die für die beiden Gränzstrahlen gültige Beziehung  $\left(1 + \frac{m' A'^2}{mA^2}\right) = n_s^2 = n_o^2 \frac{\lambda_s}{\lambda_m}$  sich für die Verbindungslien der selben fortsetzt.

Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $v$  und Absorptionscoefficient  $q'$  endlich werden vom Einfallswinkel unabhängig.

Im Folgenden setze ich noch einige Beziehungen her, die den Zusammenhang zwischen der dispergirenden Kraft  $D' = Dn_s^2$  und den Bestimmungsstücken der charakteristischen Strahlen vermitteln und bei den obigen Umformungen verwandt sind. Man hat:

$$D = \frac{n_s^2 - n_o^2}{n_o^2} = \frac{\lambda_s^2 - \lambda_m^2}{\lambda_m^2} = \frac{\lambda_m^2 - \lambda_1^2}{\lambda_m^2} = \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{\lambda_m^2}$$

$$= \left(1 - \frac{n_s^2}{n_o^2}\right)^2 = \left(1 - \frac{l_s^2}{l_m^2}\right)^2 = \left(1 - \frac{\lambda_s}{\lambda_m}\right)^2$$

$$= \left(\frac{n''_s - n'_s}{n''_s + n'_s}\right)^2 = \left(\frac{l''_s - l'_s}{l''_s + l'_s}\right)^2 = \left(\frac{\lambda''_s - \lambda'_s}{\lambda''_s + \lambda'_s}\right)^2$$

$$n''_s + n'^2_s = 2n_s^2, \quad l''_s + l'^2_s = 2l_m^2, \quad \lambda'_s + \lambda''_s = 2\lambda_m,$$

$$n_o = n_s \frac{\lambda_1}{\lambda_m} = \frac{n'_s n''_s}{n_s}.$$

3. Wurden in vorstehender Entwicklung die allgemeinen Gleichungen (IV) und (V) nur auf optisch-chemisch einfache Mittel angewendet und in ihren Consequenzen verfolgt, so lassen wir nunmehr diese Beschränkung fallen. Einer erschöpfenden Behandlung derjenigen Mittel, die aus beliebig verschiedenen Arten von Molekülen zusammengesetzt sind, und deren Dispersionscurve daher ebenso viele scheinbare Unstetigkeiten aufweist, treten indes sofort gewisse Schwierigkeiten entgegen, die allerdings weniger theoretischer, als praktischer Natur sind. Man hat eben die aufgestellten Gleichungen, deren Gliederzahl (m) gleich wird der Zahl der vorkommenden Bestandtheile, nach  $n$ ,

resp.  $a$  und  $b$  als Functionen von  $\lambda$  aufzulösen und aus den in verschiedenen Wurzeln nach Analogie des oben behandelten Specialfalles diejenige auszuwählen, welche der wirklichen Dispersionscurve entspricht. Wir werden daher nicht weiter gehen als nöthig ist, um die aufgestellten Gleichungen an der Erfahrung prüfen zu können. Mit Rücksicht hierauf ist dann von vornherein ein abgekürztes Verfahren zulässig.

Die Beobachtungsreihen, die bis jetzt zur numerischen Berechnung vorliegen, sind die bekannten Messungen Kundt's<sup>1)</sup>). Kundt hat die Brechungsverhältnisse der gewöhnlichen Fraunhofer'schen Linien für verschiedene concentrirte Lösungen von Fuchsin, Cyanin und übermangansaurem Kali und zwar auf vier Decimalen bestimmt. Beachtet man indefs, dass das Absorptionsspectrum des übermangansauren Kali nicht weniger als fünf Absorptionsstreifen aufweist, während sowohl Fuchsin wie Cyanin nur einen einzigen zeigen, so wird man ersteres daraufhin schon ausschliessen müssen. Andererseits hat das breite Absorptionsband des Fuchsinspectrums ein unsymmetrisches Aussehen; seine Schwärze fällt nach dem Roth zu sehr steil, nach dem Violet dagegen sehr allmälig ab, und so dürfte hier wohl die Anschauung berechtigt seyn, dass man es für Fuchsin behufs Anwendung der Formel (3) mit unendlich vielen, continuirlich einander folgenden Gliedern zu thun und somit die Summation durch Integration zu ersetzen habe. Eine solche würde aber wegen des ungleichförmigen Verlaufes der unbekannten Function  $D'$  völlig unmöglich und andererseits ein Absehen davon nur zu ungenauen Resultaten führen. Sonach bleibt bloß die Cyaninreihe, und wie man auch die Constitution des Absorptionsstreifens des Cyanins auffassen möge, seine symmetrische Gestalt wird es noch am ersten gestatten, die etwa vorhandenen successiven Elementarabsorptionen zu einer einzigen resultirenden in Ein Glied zusammenzufassen.

1) Diese Ann. Bd. 145, S. 73.

Zu dem Einfluss des gelösten Farbstoffes tritt dann weiter der Einfluss des Lösungsmittels (Alkohol), der indes im wesentlichen nur refraktiv wirkt. In Bezug hierauf habe ich in einer früheren Arbeit<sup>1)</sup> gezeigt, daß die Dispersionscurve fast aller durchsichtigen Mittel (Flüssigkeiten, Gläser und Krystalle) wenigstens innerhalb des weiten Bereiches zwischen den Fraunhofer'schen Linien *A* und *R* volle vier Constanten verlangt, und daß die Form derselben auf Absorptionen im Ultraviolet und Ultraroth schließen lasse. Um indes nicht mit mindestens sechs Constanten rechnen zu brauchen, darf man von den verhältnismäßig schwachen und fern liegenden ultraroten absehen und sich sonach auf folgende Glieder beschränken:

$$n^2 - n_*^2 = \frac{D'_A L_A^2}{l^2 - L_A^2} + \frac{D'_C L_C^2}{l^2 - L_C^2},$$

wo sich das erste der beiden rechts stehenden auf den Einfluss des Alkohols, das letztere auf den des Cyanins beziehen soll.

Wir lassen endlich mit Rücksicht auf die vorliegende Beschränktheit des Spectralfeldes (von *A* bis *H*) sowie darauf, daß innerhalb dieser Gränzen schon die zweigliedrige Cauchy'sche Formel zur genäherten Darstellung, wenn auch nicht der Dispersion, so doch des Einflusses des Alkohols genügen wird, noch  $L_A^2 = 0$ ,  $D'_A = \infty$  werden, so daß  $D'_A L_A^2 = B$  eine endliche Größe bleibt. Und indem wir im übrigen die angehängten *C* fortlassen, erhalten wir die nunmehr vierconstantige Gleichung:

$$n^2 = n_*^2 + \frac{B}{l^2} + \frac{D'_C L_C^2}{l^2 - L_C^2} \quad \dots \quad (16).$$

Ersetzt man in derselben *l* durch  $\frac{\lambda}{n}$  und gibt ihr zunächst die Form:

$$[(n_*^2 - D') L^2 - B] - L^2 n^2 - n_*^2 \frac{\lambda^2}{n^2} + B L^2 \frac{n^2}{\lambda^2} + \lambda^2 = 0, \quad (17)$$

so lassen sich daraus mittelst vier der Beobachtung entnommener, zusammengehöriger Werthe von *n* und  $\lambda$  ihre vier Constanten berechnen.

1) Diese Ann. Bd. 140, S. 1.

Man setze alsdann  $D' = D n_s^2$  und:

$$n^2 = \frac{n_s^2}{1 - \frac{B}{\lambda^2}} \quad \dots \quad (18)$$

und löse die Gleichung nach  $n^2$  auf; es kommt so:

$$\begin{aligned} n^2 &= \frac{1}{2} \left( n^2 (1 - D) + \frac{\lambda^2}{L^2} \right) \\ &\pm \sqrt{\frac{1}{4} \left( n^2 (1 - D) + \frac{\lambda^2}{L^2} \right)^2 - n^2 \frac{\lambda^2}{L^2}} \end{aligned} \quad (19).$$

Mittelst dieses Ausdrückes berechnen sich die den einzelnen  $\lambda$  entsprechenden  $n$ . Dabei ist zu bemerken, daß für die violette Seite des Absorptionsstreifens das positive und für die rothe das negative Vorzeichen zur Anwendung kommt.

Vorstehende Gleichung unterscheidet sich von Gl.(4b) nur dadurch, daß dort  $n_s$  statt  $n$  und  $\lambda_s = n_s L$  statt  $n L$  steht. Zieht man daher auch hier die Wurzel aus und schreibt diesmal  $n_s L = A_s$ , so daß  $\frac{\lambda}{n L} = \frac{\lambda}{A_s} \sqrt{1 - \frac{B}{\lambda^2}}$  wird, so folgt unmittelbar:

$$n = \frac{1}{2} n \left[ \sqrt{\left( 1 + \frac{V \lambda^2 - B}{A_s} \right)^2 - D} \pm \sqrt{\left( 1 - \frac{V \lambda^2 - B}{A_s} \right)^2 - D} \right].$$

Für die Gränzwellenlängen ( $\lambda_s$ ) und für die Wellenlänge stärkster Absorption ( $\lambda_m$ ) ergibt sich daraus die einfache Beziehung:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_s^2 - B &= A_s^2 = n^2 L^2 \\ \lambda_m^2 - B &= A_s^2 (1 \pm \sqrt{D})^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (20).$$

Und so erhält man ohne Weiteres den zu Gl.(9a) analogen Ausdruck:

$$\frac{n^2 - n_s^2}{n^2} = \frac{1}{4 A_s^2} \left( V \lambda^2 - \lambda_s^2 - V \lambda^2 - \lambda_m^2 \right)^2 \quad (21)$$

als eine erweiterte Form derselben, welcher sich natürlich gleichfalls zur numerischen Rechnung eignet.

*Es verläuft also, abgesehen von der Verschiebung des Absorptionsstreifens, die Dispersionskurve der Lösung in*

(18) ähnlicher Weise zu beiden Seiten einer krummen Linie ( $n = f(\lambda)$ ) wie die des Farbstoffs selber um eine Gerade ( $n = \text{Const.}$ ).

Die beiden vorstehenden Beziehungen zwischen den charakteristischen Strahlen schreiben sich jetzt auch so:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_n &= n_s L \\ \frac{n_s^2}{n_g^2} &= \frac{l_s^2}{L^2} = \frac{\lambda_s}{n_s L} = 1 \pm \sqrt{D} \end{aligned} \right\} \quad (20b),$$

aber da in letzterer der Werth von  $n_s$  variabel geworden, so hat man statt der früheren dreifachen Gleichung (am Schluss der vorigen Nummer) nur noch die einfache:

$$l_s^2 + l''_s^2 = 2L^2.$$

4. Hiernach lasse ich die Berechnung der Beobachtungsreihen Kundt's, soweit sie sich auf Cyanin beziehen, folgen. Hr. Stud. Claes war so freundlich, dieselbe für mich auszuführen.

Tabelle I.  
Cyaninlösung 1,22 Proc.

Fraunhof. Linie	$n$ beobachtet	$n$ berechnet	$\delta$
A	1,3666	1,36660	0
a	1,3678	1,36783	- 0,3
B	1,3691	1,36912	- 0,2
C	1,3714	1,37140	0
*E	1,3666	1,36810	- 15,0
*b	1,3675	1,36847	- 9,7
F	1,3713	1,37130	0
G	1,3757	1,37570	$\pm$ 0,0
H	1,3793	1,37930	0

$$n_s = 1,35966 \quad l'_s = 0^{***},00057970$$

$$D' = 0,002143 \quad l''_s = 0^{***},00062001$$

$$B = 0,47554 \cdot 10^{-8} \quad n'_s = 1,34588$$

$$L = 0^{***},00043825 \quad n''_s = 1,39120$$

$$A_n = 0^{***},000596.$$

Tabelle II.  
Cyaninlösung concentrirt.

Fraunhof. Linie	$n$ beobachtet	$n$ berechnet	$\delta$
<i>A</i>	1,3732	1,37320	0
<i>a</i>	1,3756	1,37564	- 0,4
<i>B</i>	1,3781	1,37810	± 0,0
<i>C</i>	1,3831	1,38310	0
* <i>E</i>	1,3658	1,36250	+ 33,0
<i>F</i>	1,3705	1,37050	0
<i>G</i>	1,3779	1,37788	+ 0,2
<i>H</i>	1,3821	1,38210	0

$$n_{\infty} = 1,36292 \quad \lambda'_s = 0^{mm},00055422$$

$$D' = 0,007005 \quad \lambda''_s = 0^{mm},00062645$$

$$B = 0,53828 \cdot 10^{-8} \quad n'_s = 1,33363$$

$$L = 0^{mm},00042911 \quad n''_s = 1,41343$$

$$A_s = 0^{mm},000585.$$

Die erste Tabelle umfaßt eine ungesättigte, die zweite eine concentrirte Lösung. In der ersten Spalte stehen die Fraunhofer'schen Linien, in der zweiten die beobachteten (4 Decimalen) und in der dritten die berechneten Brechungsverhältnisse, endlich in der letzten die Differenzen zwischen beiden.

Zur Berechnung der Constanten wurden jedesmal die Fraunhofer'schen Linien *A*, *C*, *F*, *H* benutzt; den Werth derselben findet man einer jeden Tabelle angehängt. Als dann wurden die Indices der übrigen Linien mittelst der obigen Formeln aus ihren Wellenlängen<sup>1)</sup> berechnet.

Wie man ersieht, ist die Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung für alle Linien mit Ausnahme von *E* und *b* eine absolute. Die Bestimmung der letzteren hielt Kundt selbst für unsicher und markirte sie daher durch einen Stern. Aus den vorliegenden Daten scheint indess hervorzugehen, daß hier weniger eine außergewöhnliche Unsicherheit als vielmehr eine völlige Verwechselung benachbarter Spectrallinien stattgefunden habe. Jedenfalls

1) Thalén. *Mémoire sur les longueurs d'onde.* Upsal. 1868.

ist die Differenz zwischen den Indices von  $E$  und der zunächst liegenden Gränzlinie ( $n_x - n'$ ) nicht gröfser als die von  $C$  und der dieser zunächst liegenden ( $n'' - n_c$ ).

Auf den Einfluß, welchen die verschiedenen Glieder der Gl. (16) auf den Verlauf der resultirenden Dispersionscurve haben, behalte ich mir vor, bei einer andern Gelegenheit zurückzukommen<sup>1)</sup>; hier werde bloß erwähnt, daß nach dem Verhältnis der entsprechenden  $D'$  die concentrierte Lösung ungefähr 3,3 mal soviel Cyanin enthielt als die andere.

5. Nach diesem, gewiß außerordentlich günstig ausgefallenen Vergleich zwischen Theorie und Erfahrung möge es gestattet seyn, die erstere durch Weiterführung der Rechnung noch etwas näher zu erläutern. Ich benutze zu diesem Zwecke die Constanten der concentrirten Lösung, und da es sich hier wesentlich um Brechung und Absorption innerhalb des engen Gebietes der complexen Zone handeln soll, so möge der Einfachheit wegen dem wirklich untersuchten Gemisch von Farbstoff und Lösungsmittel ein dioptrisch einfaches Mittel substituirt werden, welches zwischen den beobachteten Gränzwellenlängen nahezu das gleiche Verhalten zeigt wie jenes.

Betrachten wir daher  $\lambda'$ ,  $\lambda''$ , und für das arithmetische Mittel beider  $n_m$  als gegeben, so berechnen sich alle

1) Man sieht insbesondere, daß  $L^2 = \frac{\epsilon'}{\lambda'}$ , welche Größe in früheren

Abhandlungen als eine von der Dichtigkeit unabhängige absolute Constante betrachtet wurde, für beide Lösungen verschiedene Werthe hat und zwar mit Zunahme der Concentration abnimmt. Das Gleiche gilt zwar auch von  $A_m^2 = n_m^2 L^2$ , indefs ist dessen Abnahme kleiner, da gleichzeitig  $n_m^2$  wächst. Wäre wirklich  $A_m^2$  wenigstens innerhalb gewisser Dichtigkeitsgränzen constant, so würde, wie ich in einer demnächstigen experimentellen Arbeit zeigen werde, der von Kundt (Jubelband S. 617) für die Verschiebung des Absorptionsstreifens aufgestellten Regel in Strenge entsprochen seyn.

Es möge hier noch bemerkt werden, daß  $n_m^2$   $\left(= \frac{m A_m^2 + m' A'_m^2}{m A_m^2}\right)$ , also das hierdurch definirte Verhältnis zweier lebendigen Kräfte in jüngster Zeit als die Dielektricitätsconstante angesehen wird.

weiteren Daten mit Hilfe der einfacheren Formeln der Nummer (2).

Demgemäß kommt:

$$\lambda' = 0^{mm},00055422, \quad \lambda'' = 0,00062645, \\ \lambda_m = 0,00059033$$

und:

$$n_m = \frac{n_s}{\sqrt{1 - \frac{B}{\lambda_m^2}}},$$

oder wenn wir letzteres den früheren Bezeichnungen entsprechend, fortan selber als  $n_s$  schreiben:

$$n_s = 1,37355.$$

Daraus berechnen sich zunächst mittelst der Beziehungen (5) die Gränzindizes:

$$n' = 1,3309, \quad n'' = 1,4150,$$

deren Differenz um 43 Einheiten der vierten Stelle größer ist als die entsprechende des zusammengesetzten Mittels.

Die weiteren Rechnungen sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

Tabelle III.

	$\lambda$	$\frac{m' A'^2}{mA^2}$	$\sqrt{1 + \frac{m' A'^2}{mA^2}}$
$\lambda''_s$	0,0006264	1,0021	1,4150
$\lambda_2$	5914	0,8941	1,3763
$\lambda_m$	5903	0,8906	1,3750
$\lambda_1$	5892	0,8871	1,3737
$\lambda'_s$	5542	0,7713	1,3309
	$A$	$q_s = b$	$r_s = a$
$\lambda''_s$	$0^\circ$	0	1,4150
$\lambda_2$	$7^\circ 25'$	0,04200	1,3742
$\lambda_m$	$7^\circ 26'$	0,04202	1,3729
$\lambda_1$	$7^\circ 28'$	0,04200	1,3716
$\lambda'_s$	$0^\circ$	0	1,3309

$$n_s = 1,3735$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}(n_s^2 + n_m^2)} = 1,3723$$

$$n_0 = 1,3710.$$

Die erste Zahlencolumn enthält neben den Wellenlängen der Gränzen und der stärkst absorbirten Mitte des Absorptionsstreifens noch die Wellenlängen der zwei weiteren Punkte:  $\lambda_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(\lambda''_2 + \lambda''_s)}$  und  $\lambda_1 = \sqrt{\lambda'_s \lambda''_s}$ . Der erstere liegt zwischen  $G''$  und  $M$ , der zweite zwischen  $G'$  und  $M$  und zwar beide wegen der Schwäche der Dispersion symmetrisch geordnet; ihr Abstand von  $M$  ist verhältnismässig gering.

In der zweiten Column findet man die zugehörigen Verhältnisse der maximalen lebendigen Kräfte (wenn  $A=0$  wäre), die den Quadraten der Amplitüdenverhältnisse proportional sind, und in der folgenden die diesen Verhältnissen entsprechenden Brechungsverhältnisse für  $A=0$ . Die vierte Column giebt die Phasenverschiebungen  $A$ , die, wie man sieht, von  $0^\circ$  bis zu etwa  $7^\circ,5$ , entsprechend einer Verzögerung von  $\frac{7,5}{360} = \frac{1}{48}$  Wellenlänge, ansteigen.

Endlich geben die fünfte und sechste Column Absorptionscoefficient  $b$  und Brechungsindex  $a$  für senkrechte Incidenz. Während ersterer symmetrisch verläuft, bemerkt man, dass die Zahlen der sechsten Column im Innern des Absorptionsstreifens kleiner sind als die der dritten. Aus  $a$  und  $b$  lässt sich das Brechungsverhältniss  $\nu$  für jede andere Incidenz berechnen. Es ist das beispielsweise für streifende Incidenz ( $e=90^\circ$ ) und für die Mitte ( $\lambda=\lambda_s$ ) geschehen und hat sich ergeben:

$$\nu_{90} = 1,37364$$

$$\nu_0 = 1,37291,$$

so dass  $\nu_{90}$  sich wenig grösser herausstellt als  $\nu_0$ . Die Differenz zwischen streifender und senkrechter Incidenz ist überhaupt so gering, dass bereits  $q' = \frac{ab}{\nu}$  als vom Einfallswinkel unabhängige Größe betrachtet werden darf.

Stellen wir sonach die Maximalwerthe des Absorptionsfactors  $e^{-\frac{2\pi}{\lambda} q'}$  und der Phasendifferenz zusammen, so würde sich die Schwingungsbewegung unseres Mittels durch die beiden Elemente:  $\text{streifend}$  und  $\text{senkrecht}$

$F = e^{-0,26 \frac{d}{\lambda}}$ ,  $\vartheta = 7^\circ 28'$   
charakterisiren.

Was schliefslich die weniger concentrirte Cyaninlösung betrifft, so wird es, da ohnehin die drei Punkte  $\lambda_1$ ,  $\lambda_m$ ,  $\lambda_2$  für dieselbe nahe zusammenfallen, genügen, sich auf  $F$ . und  $\vartheta$  zu beschränken. Man findet:

$$F = e^{-0,14 \frac{d}{\lambda}}, \quad \vartheta = 4^\circ 4',$$

also Zahlen, die nahezu halb so gross sind wie die für die concentrirte Lösung.

Bonn, im September 1876.

## XI. Ueber die neutralen Kämme der Holtz'schen Maschine; von P. Rieß.

(Aus d. Monatsber. d. Akad. d. Wiss. April 1876.)

Die von Holtz erfundene Elektrophormaschine mit Einer drehbaren Glasscheibe besaß anfangs nur zwei an den in einer Horizontalebene liegenden Elektroden horizontal befestigte Metallkämme. Jeder Kamm hat die zweifache Bestimmung, die eine Hälfte der durch die Kämme getheilten Scheibe mit Elektricität zu versehen und die andere Hälfte zu entladen. Die Maschine ist in dieser Form sehr ausgiebig, hat aber den Mangel, dass, wenn die Elektroden nicht schwach elektrisch gehalten werden können, dieselben häufig ihre Elektricitätsart wechseln. Flaschenfunken sind von ihr bei einer rotirenden Scheibe von 15 rhein. Zoll Durchmesser zwischen  $8\frac{3}{4}$  Linien dicken Kugeln nur in der Länge von höchstens drei Zollen zu erhalten. Deshalb erhielt die Maschine später noch zwei Metallkämme, wie die ersten den Papierkuchen gegenübergestellt, die dazu eine grössere Ausdehnung erhalten

mussten. Die hinzugesetzten Kämme wurden an den Enden eines Metallstabes befestigt, der mit seiner Mitte um die Axe der Glasscheibe gedreht werden kann. Das Zusatzstück (der Metallstab mit seinen Kämmen) ist von Poggendorff „der diametrale Hülfsconductor“, von Holtz „die Hülfsconductoren“ genannt worden und wird zuweilen vertical, gewöhnlich gegen den Horizont geneigt gestellt. Ich habe absichtlich bei Darlegung der Theorie der Maschine mit 4 Kämmen (Akad. Berichte 1870, S. 3) von dem Metallstabe nicht gesprochen, sondern nur von den „schrägen Kämmen“ an seinen Enden. Diese Kämme haben den Vortheil, daß die Maschine bei ungeschlossenen Elektroden erregbar ist und diese, dem Wechsel ihrer Elektricitätsart weniger ausgesetzt, viel längere Flaschenfunkens liefern, aber den Nachtheil, daß die Maschine an Ausgiebigkeit der Maschine mit nur 2 Kämmen beträchtlich nachsteht. Dafs der Vortheil überwiegt, zeigt die große Verbreitung der Maschine mit 4 Kämmen, von welcher, wie Holtz angibt (Pogg. Ann. Bd. 156, S. 627) ein einziger deutscher Mechaniker bis jetzt über tausend Exemplare versendet hat. Damit die zugesetzten Kämme zur Wirksamkeit kommen, ist die Bedingung, daß sie fort und fort *unelektrisch* gemacht werden, indem von den beiden gleichen Elektricitätsmengen, welche jeder Kamm durch Influenz erhält, die eine auf die rotirende Scheibe strömt, die andere fortgeschafft wird. Um diese häufig übersehene Bedingung im Auge zu behalten, ist es gerathen, die Kämme statt nach ihrer Stellung, nach ihrer nothwendigen Eigenschaft als *neutrale Kämme* zu bezeichnen.

Um den zugesetzten Kämmen diese Eigenschaft zu geben, kann man verschiedene Wege einschlagen. Eine alte Holtz'sche Maschine mit 15 rhein. Zoll breiter rotirender Scheibe und durchgehender Axe erhielt zu ihren beiden horizontalen Metallkämmen an den Elektroden, noch zwei gleiche Kämme, die nahe vor der Scheibe, der flachen horizontalen Seite der Papierkuchen zunächst

in dem 45 Grad gegen den Horizont geneigten Durchmesser mit ihren etwa  $5\frac{1}{2}$  Zoll langen Messingstielen in Säulen aus Hartkautschuk befestigt waren. Den zugesetzten Kämmen gegenüber waren auf der ruhenden Glasscheibe zwei Papierkuchen von der Länge der Kämme und genügender Breite mit Wachs befestigt und jeder von ihnen durch einen schmalen Papierstreifen mit dem nächsten horizontalen Papierkuchen verbunden. Die Maschine war nur bei geschlossenen Elektroden zu erregen, lieferte mit ihren beiden leydener Flaschen und Elektrodenkugeln von  $8\frac{3}{4}$  Lin. Dicke zwei Zoll lange Funken und erlosch darauf häufig. Beim Funkenziehen hier und in der Folge wurde die negative Elektrodenkugel von der positiven entfernt. Es wurden darauf lange dünne Kupferdrähte an den Stielen der zugesetzten Kämme und ihre Enden  $2\frac{1}{2}$  Fuß von der Maschine entfernt in Holzstativen befestigt. Die Maschine konnte nun auch bei ungeschlossenen Elektroden erregt werden und lieferte Funken von 3 bis  $3\frac{1}{4}$  Zoll Länge. Die Funken erreichten eine Länge von 4 bis  $4\frac{1}{2}$  Zoll, als das Ende des einen Drahts durch eine Alkoholflamme, das des anderen durch die Flamme einer Bunsen'schen Lampe glühend erhalten wurde. Es wurden so abwechselnd Funken von 3 oder 4 Zoll Länge hervorgebracht, je nachdem die Flammen gelöscht oder angezündet waren. Die Kupferdrähte an den zugesetzten Kämmen wurden bedeutend verlängert, das Ende des einen an dem von der Decke des Zimmers herabhängenden Arme der Gasleitung, das des anderen an dem Schlauchhahne des anstoßenden Zimmers befestigt. Jetzt konnten Funken von 5 bis  $5\frac{1}{2}$  Zoll Länge erhalten werden, die längsten Funken, die ich an der Maschine bei langjährigem Gebrauche gesehen habe. Aber ein Wechsel der Pole und Erlöschen der Maschine war danach nicht selten.

Wir sehen daraus, daß die beiden zugesetzten Kämme ihre Bestimmung, die Funkenlänge zu vergrößern, nur erfüllen, wenn sie nicht isolirt sind, und um so besser erfüllen, je vollkommener sie neutral erhalten werden.

Sehon die Ausströmung an den freien Enden der an den Kämmen befestigten Drähte auferte ihre Wirkung, die vergrößert wurde durch die die Elektricität zerstreuenden Flammen und am kräftigsten wirkte die Verbindung der Kämme mit den Gasröhren.

Bei Weitem bequemer, als die angeführten Mittel ist das von Holtz angewandte, das an den jetzt gebräuchlichen Maschinen mit einseitiger Axe leicht anzubringen ist. Die neutralen Kämme befinden sich an den Enden einer beiderseitig geschlossenen Messingröhre, mit der sie ein Ganzes bilden in Form eines gleichmäßig dicken Stabes, dessen Enden mit Spitzenreihen besetzt sind. Die beiden Kämme sind in dieser Weise metallisch mit einander verbunden und bleiben ziemlich neutral, da ihre Stiele bei dem gewöhnlichen Gebrauche der Maschine ziemlich gleiche Mengen der entgegengesetzten Elektricitätsarten erhalten, die sich ausgleichen. Der Stab mit seinen Kämmen wird vermittelst eines in seiner Mitte befindlichen Stahlzapfens in ein Loch der Axe der rotirenden Scheibe gesteckt und ist in eine beliebige Neigung gegen den Horizont zu bringen. Diese Neigung darf jedoch nicht zu klein genommen werden, weil dadurch die neutralen Kämme den Elektroden zu nahe kommen. Hat man daher bei allmäßiger Verminderung der Neigung des Stabes gegen den Horizont die Wirkung der Maschine zunehmen sehen, so erreicht man nothwendig einen Punkt, von wo an die Wirkung mit weiter verminderter Neigung bis Null abnimmt. Diese Abnahme ist eine bekannte unmittelbare Wirkung der neutralen Kämme und unabhängig von ihrem Gebrauche an der Maschine. Neutrale Metallspitzen müssen thunlichst entfernt von jedem Leiter gehalten werden, auf dem man Elektricität anhäufen will, also auch von den Elektroden einer Maschine.

Eine andere bei jeder Neigung der Kämme eintretende Verminderung der Elektricitätsmenge der Maschine ist durch die Bestimmung der Kämme bedingt, wie ich dies früher angegeben habe (Akad. Bericht 1870. S. 6). So

lange die Verminderung dauert, zeigt jeder neutrale Kamm an seinen Spitzen die entgegengesetzte Lichterscheinung von der am nächsten Elektrodenkamme. Bei geschlossenen Elektroden sind diese beiden Lichterscheinungen während der ganzen Zeit der Thätigkeit der Maschine einander entgegengesetzt und deshalb leicht aufzuzeigen. Ebenso schlagend lässt sich die Verminderung der auf der rotirenden Scheibe vorhandenen Elektricitätsmenge bei ungeschlossenen Elektroden nachweisen, wobei die Verminderung nur so lange dauert, bis die Elektroden eine bestimmte el. Dichtigkeit erlangt haben. An meiner Maschine mit einseitiger Axe war die Stahlaxe der Scheibe zufällig genügend isolirt, so dass auch der Metallstab mit seinen Kämmen es war. Er konnte nach dem Gebrauche der Maschine geprüft werden und fand sich, wenn beide Elektroden isolirt waren, nach der Thätigkeit der Maschine nur wenig elektrisch, bald mit der einen bald mit der anderen Elektricitätsart. Als aber eine Elektrode zur Erde abgeleitet und kurze Zeit (ohne Ladeflaschen) ein leuchtender Funkenstrom zwischen 1 Zoll von einander stehenden Elektrodenkugeln unterhalten war, erschien der Stab elektrisch mit einer vorherzusagenden Elektricitätsart. Er wurde ohne Ausnahme negativ elektrisch gefunden, wenn die positive, positiv wenn die negative Elektrode abgeleitet gewesen war.

Hieraus ist auf den durch die neutralen Kämme bewirkten Verlust von der zur Benutzung bestimmten Elektricität zu schließen. So lange der Verbindungsstab der Kämme von diesen gleiche Mengen positiver und negativer Elektricität erhält, wie es bei guter Einrichtung der Maschine und isolirten Elektroden beinahe der Fall ist, kann in seinem elektrischen Zustande der Elektricitätsverlust, obgleich vorhanden, nicht erkannt werden. Wird aber eine Elektrode zur Erde abgeleitet, so wird die rotirende Scheibe von dem Kamme dieser Elektrode mit einer grösseren Elektricitätsmenge versehen, als von dem diametralen isolirten Elektrodenkamme. Indem die Scheibe an

den nächsten neutralen Kamm tritt, verliert sie an diesen denselben Theil der auf ihr vorhandenen Elektricitätsmenge, wie an den diametralen neutralen Kamm, also absolut eine grössere Menge. Der Verbindungsstab behält die Differenz beider Elektricitätsmengen, wird also ungleichnamig elektrisch mit der abgeleiteten Elektrode.

Die unabsichtliche Elektrisirung des isolirten Verbindungsstabes bringt Störungen in das Spiel der Maschine, die beseitigt werden durch Ableitung des Stabes zur Erde. Nur hierdurch habe ich die grösste Wirkung meiner Maschine, Funken von mehr als sieben Zoll Länge, erhalten können.

Die neutralen Kämme sind eine sehr nützliche Zugabe zur Holtz'schen Elektrophormaschine, da sie die bei ernsten Versuchen so ärgerlichen Wechsel der Elektricitätsart der Elektroden bei gehöriger Vorsicht auf ein geringes Maass beschränken, aber unumgänglich nothwendig sind sie nicht. Man kann sie bei einigen Versuchen ohne Nachtheil entbehren, bei anderen, z. B. bei der Ladung grosser Batterien ist es sogar vortheilhaft, die Kämme fortzulassen, weil man dann weit schneller zum Ziele kommt. Poggendorff hat aber einen Fall angegeben (Pogg. Ann. 141, S. 204), in welchem die Kämme nicht entbehrt werden können, nämlich an der von ihm construirten Doppelmaschine. Der Grund dieses interessanten Falles, der bisher nicht angegeben worden ist, dürfte durch die folgende Betrachtung klar werden.

Die Doppelmaschine besteht aus zwei einfachen, mit ihren beweglichen Scheiben, welche in gleicher Richtung um ihre Axe rotiren, einander parallel gegenüber gestellten Holtz'schen Maschinen. Jede der beiden Elektroden der einen Maschine ist mit der gegenüberstehenden Elektrode der anderen verbunden, was dadurch geschieht, daß zwischen den rotirenden Scheiben zwei horizontale Messingröhren, normal gegen die Scheiben, isolirt festgelegt sind, von welchen jede an beiden Enden mit horizontalen Metallkämmen versehen ist. Da die an beiden Doppelelektroden

gesammelte Elektricität benutzt werden soll, so ist es nothwendig, dass jede von ihnen von beiden Maschinen dieselbe Elektricität erhält, also je zwei der einander gegenüberstehenden Papierkuchen der Doppelmaschine gleichnamig elektrisch sind. Es sey ein Kuchen der einen Einzelmaschine positiv elektrisch gemacht, so wird die ihm zunächst liegende Elektrode elektrisch und lässt durch ihren noch nicht erregten Metallkamm positive Elektricität auf die Glasscheibe der zweiten Maschine ausströmen. Eine elektrische Platte macht einen Papierkuchen mit sich gleichnamig elektrisch, wenn sie zugleich auf den Kuchen und auf die an ihm befestigte Cartonspitze wirkt. Der Papierkuchen dem ausströmenden Kamme zunächst wird also positiv und die beiden einander gegenüberstehenden Kuchen der Doppelmaschine sind gleichnamig elektrisch, wie sie es seyn sollen. Die elektrisierte Stelle der zweiten Scheibe wird aber weiter gedreht und kommt dadurch an die Cartonspitze des zweiten Kuchens, ohne an den zweiten Kuchen selbst zu gelangen, da sie vorher durch den Elektrodenkamm entladen worden ist. Demnach wird auch der zweite Kuchen positiv elektrisch werden und zwar, weil er nur an der Cartonspitze erregt worden ist, wenn nicht die Elektricität der Scheibe durch Zerstreuung zu sehr verringert wurde nach bekannter leicht erklärlicher Erfahrung, *stärker* positiv el. werden als der erste Kuchen, der zugleich mit seiner Cartonspitze von der elektrischen Scheibe erregt worden ist. Der stärker positiv el. Kuchen giebt den Ausschlag für die Erregung der zweiten Maschine. Das Gleiche wie für den positiven gilt für den negativen Kuchen und man übersieht, dass an der Doppelmaschine die Erregung am leichtesten eintritt, nach welcher ihre einander gegenüberliegende Kuchen ungleichnamig elektrisch sind, demnach die Benutzung der erregten Elektricitäten durch Ausgleichung derselben verhindert wird. Der Gefahr der Unbrauchbarkeit der Doppelmaschine entgeht man nicht durch die einzelne Erregung beider Ma-

es noth-  
nen die-  
gegen-  
gleich-  
nen Ein-  
die ihm  
t durch  
lektricität  
strömen.  
mit sich  
Kuchen  
st. Der  
ast wird  
ehenden  
lektrisch,  
zweiten  
urch an  
zweiten  
en Elek-  
d auch  
d zwar,  
t, wenn  
nung zu  
ärlicher  
Kuchen,  
trischen  
Kuchen  
aschine.  
negativen  
aschine  
her ihre  
ig elek-  
Elektri-  
t wird.  
ine ent-  
der Ma-

schinen, es kommt dann durch zufällige relative Schwächung der einen Maschine, daß sie durch die andere neu erregt wird, und dann geschieht es zumeist in der beschriebenen Weise, welche die Benutzung der Doppelmaschine ausschließt.

Die Gefahr wird in allen Fällen beseitigt durch Anbringung von zwei neutralen Kämmen an jeder Einzelmaschine. Dann tritt in dem oben gegebenen Beispiele die Scheibe der zweiten Maschine, nachdem sie von dem Elektrodenkamm positiv elektrisiert worden ist und den nächsten Papierkuchen positiv elektrisch gemacht hat, bei ihrer Drehung an einen neutralen Kamm, wird anfangs ganz, später zum Theil entladen und kommt mehr oder weniger unelektrisch an der Cartonspitze des zweiten Papierkuchens an, der durch die ihm gegenüberstehende Elektrode negativ elektrisiert wird. Es wird also die Bedingung erfüllt, daß die einander gegenüberstehenden Papierkuchen der Doppelmaschine gleichnamig elektrisch seyen. Die Wirkung der neutralen Kämme ist daher eine sehr einfache aber durchgreifende, *sie verhindern eine elektrische Scheibe, die durch Influenz den einen Kuchen einer Elektrophormaschine erregt hat, auch an den zweiten Kuchen derselben mit ihrer ganzen Elektricitätsmenge zu treten und ihn stärker zu elektrisiren als den ersten.*

Sind die Kuchen der zweiten Maschine ebenso stark elektrisch geworden, wie die der ersten es sind, so hört die Erregung der einen Maschine durch die andere auf, und es tritt der bekannte Mechanismus der Elektrophormaschine ein: jeder Elektrodenkamm versieht die rotirende Scheibe mit der seiner Elektrode entgegengesetzten Elektricitätsart: die beiden rotirenden Scheiben werden von der positiven Doppellektrode der Maschine mit negativer, von der negativen Doppellektrode mit positiver Elektricität versehen und die Elektricitäten der Elektroden werden nicht mehr durch die Kämme entfernt, sondern auf ihnen angesammelt und zu Versuchen benutzt. Die neutralen

Kämme sind demnach nothwendig an Poggendorff's Doppelmaschine, die also vier neutrale Kämme besitzen muß.

Die Nothwendigkeit der Anwendung von neutralen Kämmen hat vor Kurzem Hr. Bleekrode angegeben bei einer Holtz'schen Maschine, deren ruhende wie rotirende Scheibe statt aus Glas aus Hartkautschuk bestand, und glaubt einen Unterschied der aus dem verschiedenen Materiale gefertigten Maschinen festgestellt zu haben (Pogg. Ann. 156, S. 304) (den Unterschied, dass die Glasmaschinen auch ohne neutrale Kämme wirken, die andern nicht). Ich habe zwar keine Maschine aus Hartkautschuk unter Händen gehabt, glaube aber die Veranlassung dieser auffallenden Meinung angeben zu können.

Im 140. Bande von Poggendorff's Annalen habe ich eine Theorie der Elektrophormaschine mit vier Kämmen gegeben, welche Hr. Bleekrode anführt. In dieser Theorie ist gesagt, dass die Maschine je nach der Elektricitätsmenge, welche ihre Elektroden besitzen, in drei verschiedenen Phasen wirkt. In der ersten Phase, wenn die Elektroden nur schwach elektrisch sind, wird jeder Elektrodenkamm durch seinen Kuchen elektrisiert und saugt die Elektricität der Scheibe ein (wirkt also zugleich als Erreger und Einsauger). „In der dritten Phase wirken die horizontalen (Elektroden-) Kämme nur als Einsauger, die schrägen (neutralen Kämme) nur als Erreger“ (S. 567). Um die erste Phase festzuhalten, braucht man nur an der gebräuchlichen Maschine die Elektroden zu schließen; um die dritte Phase festzuhalten, muss man ihren Papierkuchen eine ungewöhnliche Lage gegen die Metallkämme geben. Diesen letzten Fall, der die grosse Funkenlänge der Maschine erklärt, habe ich besonders behandelt und durch eine Figur anschaulich gemacht (S. 563), die zur Erläuterung, nicht zum Gebrauche der Maschine dient. Es stehen darin die Elektrodenkämme den weit von den Kuchen abgerückten Cartonspitzen, die neutralen Kämme den Kuchen gegenüber, und selbstverständlich sind hier die neutralen Kämme unentbehrlich, da sie allein die Maschine erregen und in Gang halten können.

Hr. Bleekrode scheint nun, wie aus einer beiläufigen Bemerkung hervorgeht (Pogg. Ann. 156, S. 294) bei seinen Kautschukmaschinen ganz allein die ungewöhnliche Stellung der Papierkuchen gegen die Kämme gebraucht zu haben,

während bei der Benutzung der Glasmaschinen allgemein alle 4 Kämme den Papierkuchen gegenübergestellt werden. Nicht also das verschiedene Material der Scheiben, sondern die verschiedene Stellung der Kämme bewirkt hier-nach den Unterschied der von ihm betrachteten Maschinen.

Kurze Zeit nach der Erfindung der Maschine mit vier Kämmen änderte ich dieselbe ab, in der Absicht ihre Vortheile zu erhalten und den Nachtheil der geringen Er-giebigkeit zu vermeiden (Pogg. Ann. 140, S. 168). Von den beiden neutralen Kämmen wurde der eine fortgelassen, ebenso der ihm gegenüberstehende Papierkuchen, und die dem einzeln stehenden Kuchen zugewandte Elektrode voll-ständig zur Erde abgeleitet. Diese Maschine mit nur drei Kämmen war anfangs nur zum Laden von Batterien be-stimmt, hat sich aber in vortrefflicher Ausführung durch Hrn. Borchardt auch zu andern Versuchen so brauchbar gezeigt, dass ich ihre Einrichtung später ausführlich an-gab, eine Abbildung derselben und Versuche hinzufügte, welche gewöhnlich an anderen Maschinen angestellt werden (Akad. Berichte 1874. S. 196). Unter allen mir bekannten Maschinen ist die Maschine mit drei Kämmen am leich-testen erregbar, hält ihre Ladung am längsten und ein Wechsel der Elektricitätsart ihrer Elektroden ist mir in 5 Jahren eines häufigen Gebrauchs nicht vorgekommen. Sie liefert direct nur Eine Elektricitätsart, diese aber, bei einem Durchmesser ihrer rotirenden Scheibe von  $15\frac{1}{2}$  par. Zoll in großer Menge und zwischen Elektrodenkugeln von  $10^{\frac{1}{2}}$  Linien Dicke Flaschenfunken von  $4\frac{1}{2}$  Zoll Länge. Für die wenigen Versuche, die eine grössere Funkenlänge oder den directen Zufluss von beiden Elektricitätsarten verlangen (z. B. zur Darstellung der schwachen Funken), hat Hr. Borchardt der Maschine eine zweite ruhende Scheibe, zwei durch einen Metallstab verbundene Kämme und einen zweiten Elektrodenstab mit Endkugel beigegeben, so dass die Maschine in wenigen Minuten in die Holtz'sche Elektrophormaschine mit vier Kämmen verwandelt werden kann.

Kämme sind demnach nothwendig an Poggendorff's Doppelmaschine, die also vier neutrale Kämme besitzen muß.

Die Nothwendigkeit der Anwendung von neutralen Kämmen hat vor Kurzem Hr. Bleekrode angegeben bei einer Holtz'schen Maschine, deren ruhende wie rotirende Scheibe statt aus Glas aus Hartkautschuk bestand, und glaubt einen Unterschied der aus dem verschiedenen Materialien gefertigten Maschinen festgestellt zu haben (Pogg. Ann. 156, S. 304) (den Unterschied, daß die Glasmaschinen auch ohne neutrale Kämme wirken, die andern nicht). Ich habe zwar keine Maschine aus Hartkautschuk unter Händen gehabt, glaube aber die Veranlassung dieser auffallenden Meinung angeben zu können.

Im 140. Bande von Poggendorff's Annalen habe ich eine Theorie der Elektrophormaschine mit vier Kämmen gegeben, welche Hr. Bleekrode anführt. In dieser Theorie ist gesagt, daß die Maschine je nach der Elektricitätsmenge, welche ihre Elektroden besitzen, in drei verschiedenen Phasen wirkt. In der ersten Phase, wenn die Elektroden nur schwach elektrisch sind, wird jeder Elektrodenkamm durch seinen Kuchen elektrisiert und saugt die Elektricität der Scheibe ein (wirkt also zugleich als Erreger und Einsauger). „In der dritten Phase wirken die horizontalen (Elektroden-) Kämme nur als Einsauger, die schrägen (neutralen Kämme) nur als Erreger“ (S. 567). Um die erste Phase festzuhalten, braucht man nur an der gebräuchlichen Maschine die Elektroden zu schließen; um die dritte Phase festzuhalten, muß man ihren Papierkuchen eine ungewöhnliche Lage gegen die Metallkämme geben. Diesen letzten Fall, der die große Funkenlänge der Maschine erklärt, habe ich besonders behandelt und durch eine Figur anschaulich gemacht (S. 563), die zur Erläuterung, nicht zum Gebrauche der Maschine dient. Es stehen darin die Elektrodenkämme den weit von den Kuchen abgerückten Cartonspitzen, die neutralen Kämme den Kuchen gegenüber, und selbstverständlich sind hier die neutralen Kämme unentbehrlich, da sie allein die Maschine erregen und in Gang halten können.

Hr. Bleekrode scheint nun, wie aus einer beiläufigen Bemerkung hervorgeht (Pogg. Ann. 156, S. 294) bei seinen Kautschukmaschinen ganz allein die ungewöhnliche Stellung der Papierkuchen gegen die Kämme gebraucht zu haben,

während bei der Benutzung der Glasmaschinen allgemein alle 4 Kämme den Papierkuchen gegenübergestellt werden. Nicht also das verschiedene Material der Scheiben, sondern die verschiedene Stellung der Kämme bewirkt hier-nach den Unterschied der von ihm betrachteten Maschinen.

Kurze Zeit nach der Erfindung der Maschine mit vier Kämmen änderte ich dieselbe ab, in der Absicht ihre Vortheile zu erhalten und den Nachtheil der geringen Er-giebigkeit zu vermeiden (Pogg. Ann. 140, S. 168). Von den beiden neutralen Kämmen wurde der eine fortgelassen, ebenso der ihm gegenüberstehende Papierkuchen, und die dem einzeln stehenden Kuchen zugewandte Elektrode voll-ständig zur Erde abgeleitet. Diese Maschine mit nur drei Kämmen war anfangs nur zum Laden von Batterien be-stimmt, hat sich aber in vortrefflicher Ausführung durch Hrn. Borchardt auch zu andern Versuchen so brauchbar gezeigt, daß ich ihre Einrichtung später ausführlich an-gab, eine Abbildung derselben und Versuche hinzufügte, welche gewöhnlich an anderen Maschinen angestellt werden (Akad. Berichte 1874. S. 196). Unter allen mir bekannten Maschinen ist die Maschine mit drei Kämmen am leich-testen erregbar, hält ihre Ladung am längsten und ein Wechsel der Elektricitätsart ihrer Elektroden ist mir in 5 Jahren eines häufigen Gebrauchs nicht vorgekommen. Sie liefert direct nur Eine Elektricitätsart, diese aber, bei einem Durchmesser ihrer rotirenden Scheibe von  $15\frac{1}{2}$  par. Zoll in grosser Menge und zwischen Elektrodenkugeln von  $10\frac{3}{4}$  Linien Dicke Flaschenfunken von  $4\frac{1}{2}$  Zoll Länge. Für die wenigen Versuche, die eine grössere Funkenlänge oder den directen Zufluss von beiden Elektricitätsarten verlangen (z. B. zur Darstellung der schwachen Funken), hat Hr. Borchardt der Maschine eine zweite ruhende Scheibe, zwei durch einen Metallstab verbundene Kämme und einen zweiten Elektrodenstab mit Endkugel beigegeben, so daß die Maschine in wenigen Minuten in die Holtz'sche Elektrophormaschine mit vier Kämmen verwandelt werden kann.

1877.

**XII. Galvanische Tauchbatterie für Elemente mit zwei Flüssigkeiten; von Dr. Albert Hertz.**

(Auszug.)

Die Kohlencylinder und Zinkplatten einer Bunsen'schen Säule werden an einem Rahmen befestigt und mittelst desselben in die Flüssigkeiten der Säule eingesenkt oder herausgehoben. Damit sich hiebei die verdünnte Schwefelsäure in den Thonzellen mit der umgebenden Salpetersäure während der Unthätigkeit der Säule nicht mischt, wird der untere Theil einer jeden porösen Thonzelle so präparirt, daß er nicht poröse bleibt, sondern undurchdringlich für Flüssigkeiten resp. Säuren wird. Außerdem werden beide Polplatten eines jeden Elementes an ihren unteren Enden so geformt oder mit solchen durch Säuren unzerstörbaren Ansätzen versehen, daß dadurch beim Eintauchen in die Säuren, diese letzteren aus den unteren Theilen der Thonzellen und der Gläser in die oberen verdrängt werden. Dann werden die eigentlichen Polplatten und der poröse gebliebene Theil der Thonzelle von den Säuren umspült, die Batterie tritt also in Thätigkeit. Beim Herausheben der Platten mit den an ihnen befestigten Ansätzen wird der untere Theil der Gefäße wieder frei, die Säuren fließen in denselben zurück und können sich, da sie nun wieder durch den unporösen gemachten Theil der Thonzellen getrennt sind, nicht mit einander vermischen.

**XIII. Erklärung.**

Mr. Dr. Dühring hat seine Geschichte der Principien der Mechanik, welcher wir den Preis der Benecke-Stiftung zuerkannt hatten, in zweiter Ausgabe veröffentlicht. Auf die Vorreden beider Ausgaben und auf die theils eingeschalteten, theils angehängten Zusätze der zweiten hat unser Urtheil, welches auch dieser zweiten Ausgabe vorgedruckt worden ist, keine Beziehung.

Göttingen, den 28. Febr. 1877.

Die philosophische Facultät zu Göttingen.  
W. Müller, Decan.